

Curso Técnico em Eletrotécnica

Números Complexos e Conversão de Formas

AULA II

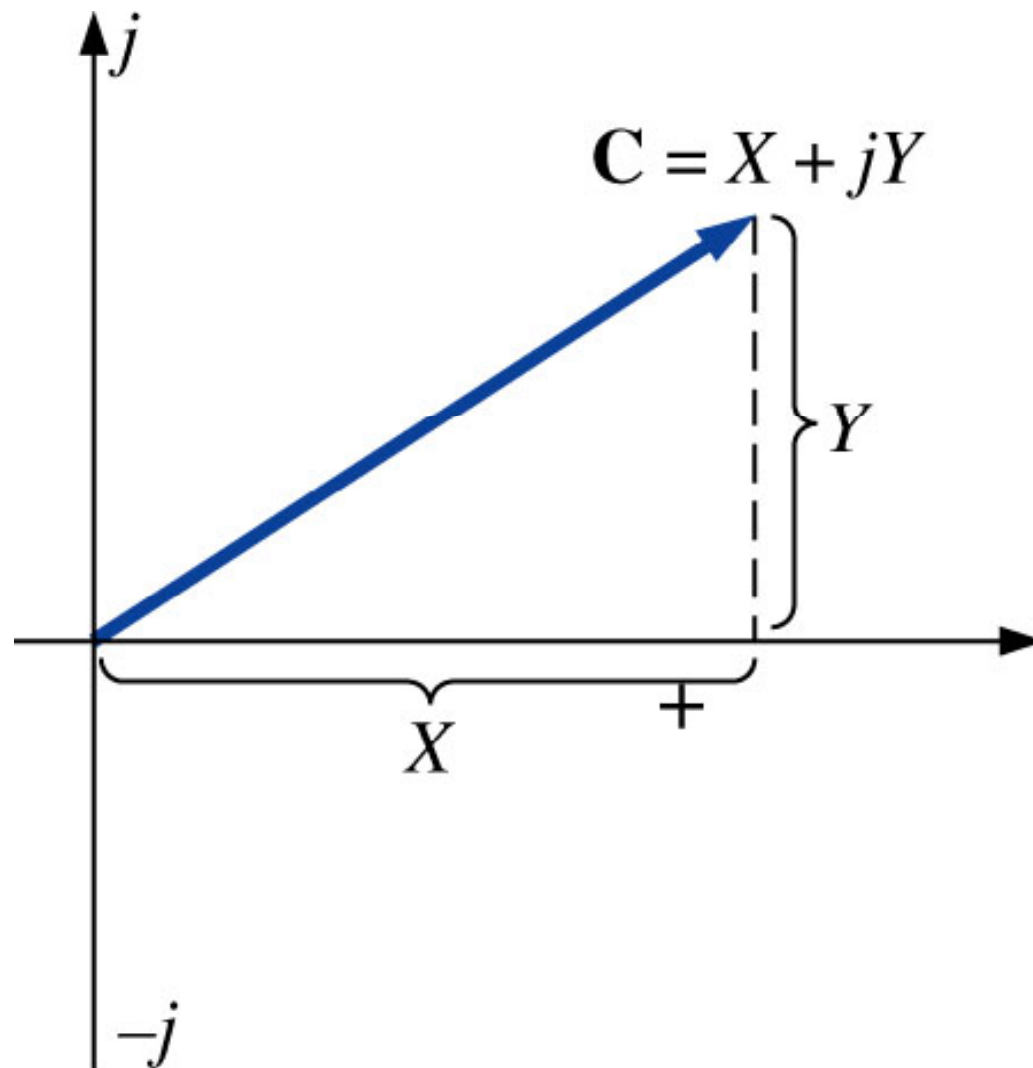
Os Dispositivos Básicos e os Fasores

1. Operações com números complexos.

Vitória-ES

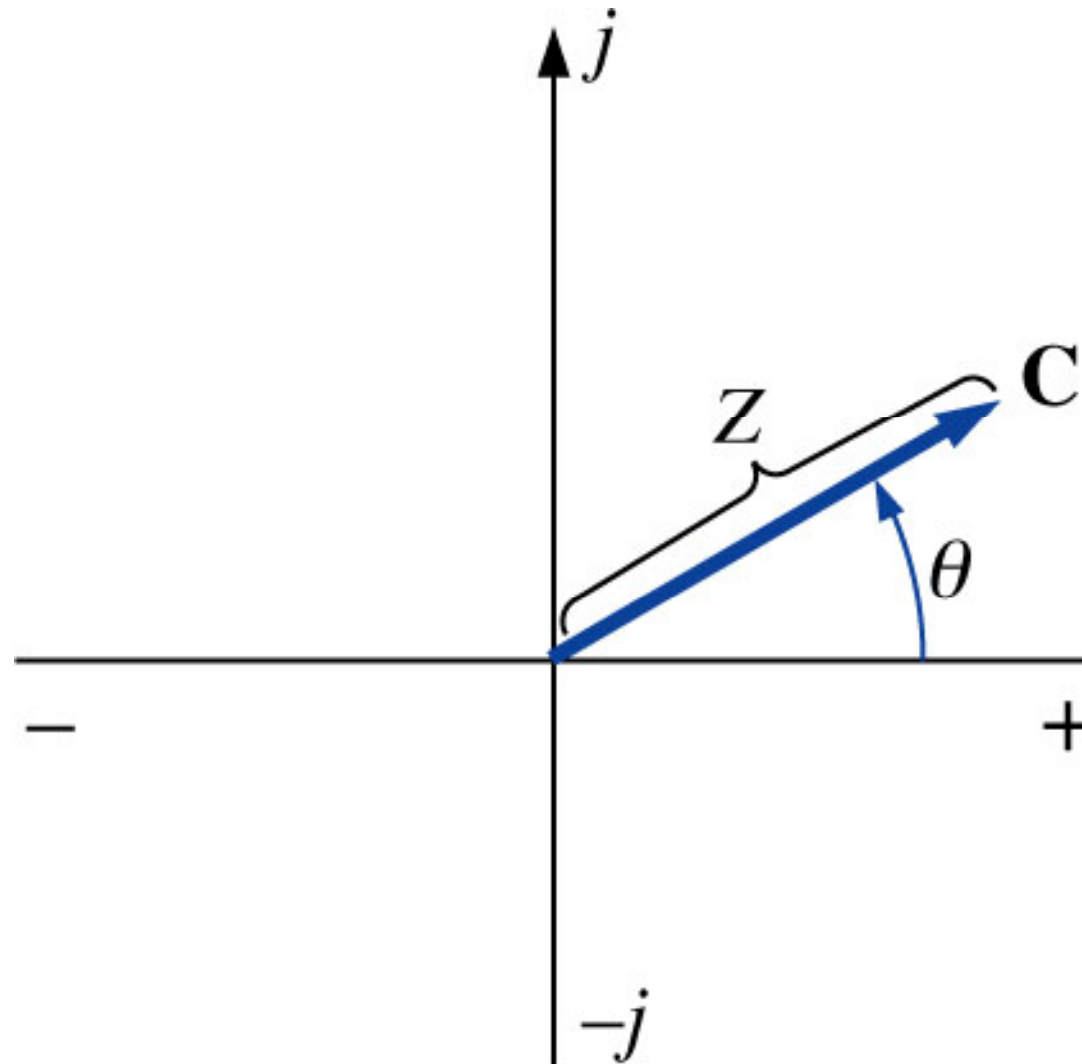
Forma retangular

$$C = X + j \cdot Y$$



Forma polar

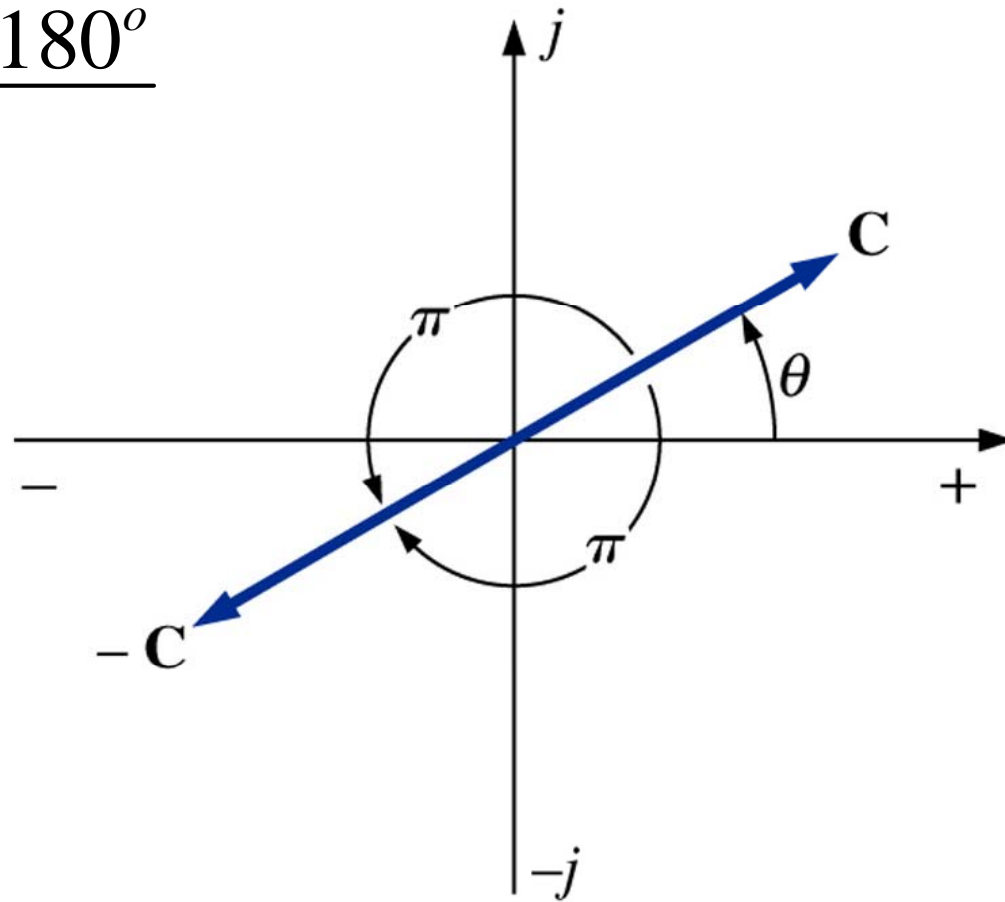
$$C = Z \angle \theta$$



Forma polar

Efeito do sinal negativo:

$$-C = -Z|\theta = Z|\theta \pm 180^\circ$$



Conversão entre formas

Retangular para polar

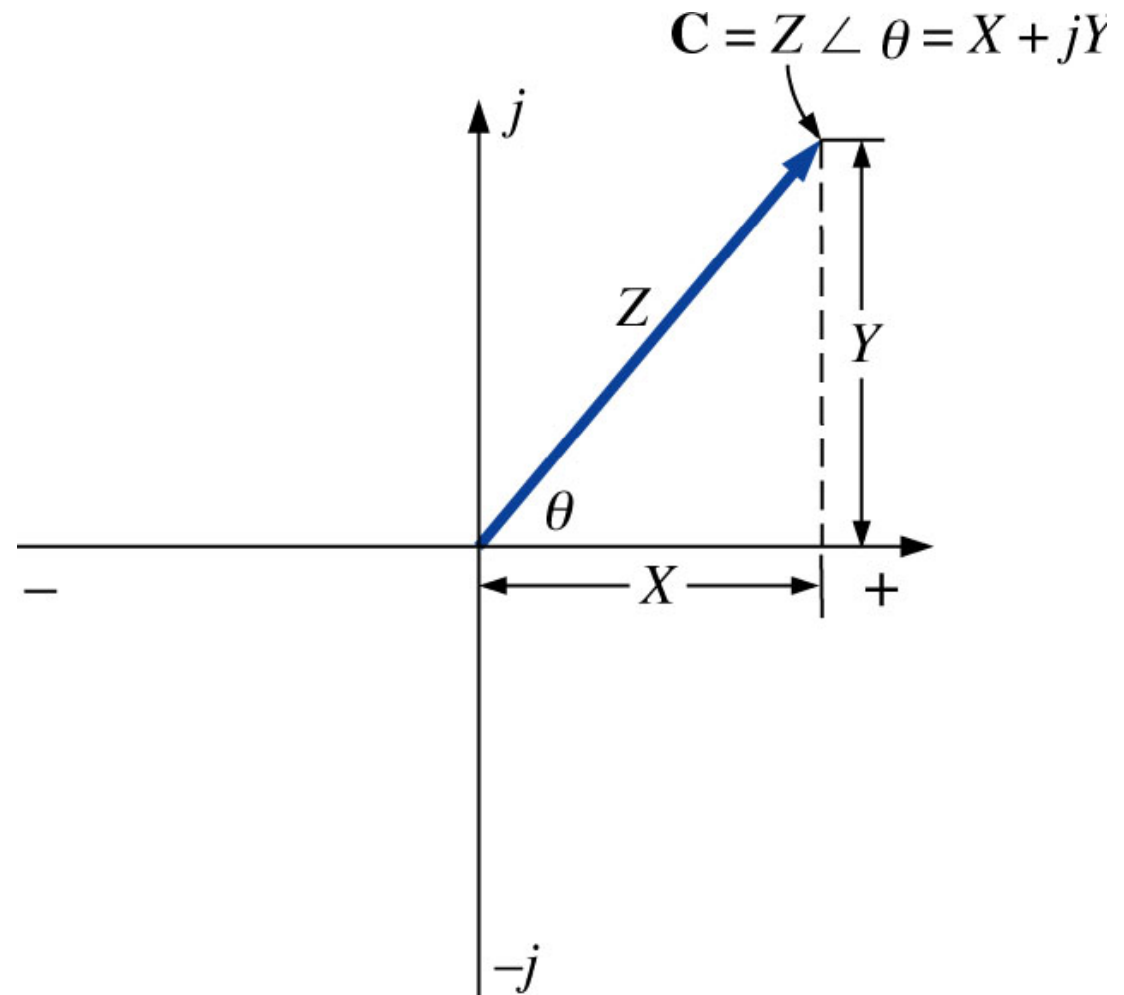
$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right)$$

Polar para retangular

$$X = Z \cdot \cos(\theta)$$

$$Y = Z \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$



Operações com o j

Por definição:

$$j = \sqrt{-1}$$

Daí:

$$j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \left(\frac{1}{j}\right) \cdot \left(\frac{j}{j}\right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

Complexo conjugado

Complexo conjugado ou conjugado, na forma retangular:

$$C = 2 + j3$$

$$C^* = 2 - j3$$



Troca de sinal

Complexo conjugado ou conjugado, na forma polar:

$$C = 2 \angle 30^\circ$$

$$C^* = 2 \angle -30^\circ$$



Troca de sinal

Inverso ou recíproco

Considere o número complexo, na forma retangular:

$$C = X + jY$$

$$\frac{1}{C} = C^{-1} = \frac{1}{X + jY} = (X + jY)^{-1}$$

Considere o número complexo, na forma polar:

$$C = Z \angle \theta$$

$$\frac{1}{C} = C^{-1} = \frac{1}{Z \angle \theta} = (Z \angle \theta)^{-1}$$

Adição de números complexos

A adição de números complexos é realizada facilmente na **forma retangular**:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

$$C_1 + C_2 = (\pm X_1 \pm jY_1) + (\pm X_2 \pm jY_2)$$

$$C_1 + C_2 = (X_1 + X_2) + J(Y_1 + Y_2)$$

Exemplo 14.19: Adicione os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 2 + j4$ e $C_2 = 3 + j1$

b) $C_1 = 3 + j6$ e $C_2 = -6 + j3$

Subtração de números complexos

A subtração de números complexos é realizada facilmente na **forma retangular**:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

$$C_1 - C_2 = (\pm X_1 \pm jY_1) - (\pm X_2 \pm jY_2)$$

$$C_1 - C_2 = (X_1 - X_2) + J(Y_1 - Y_2)$$

Exemplo 14.20: Subtraia os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 4 + j6$ e $C_2 = 1 + j4$

b) $C_1 = 3 + j3$ e $C_2 = -2 + j5$

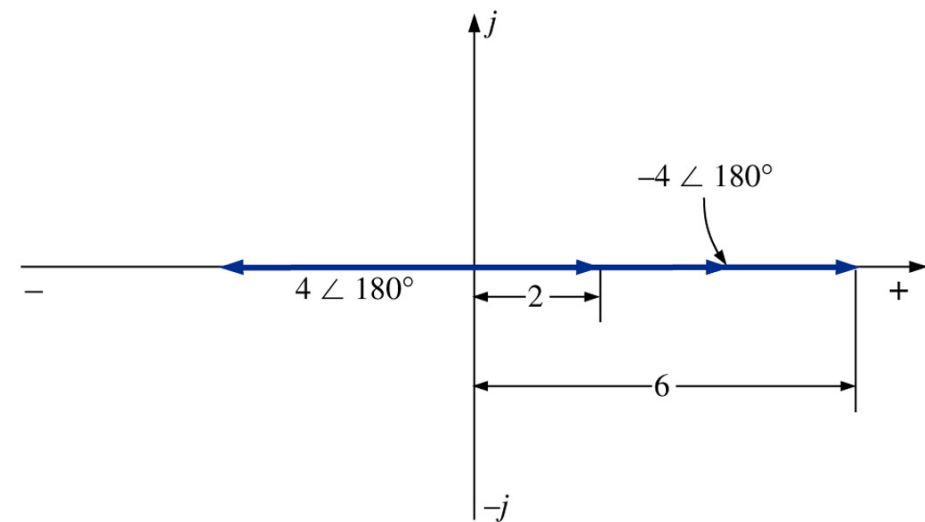
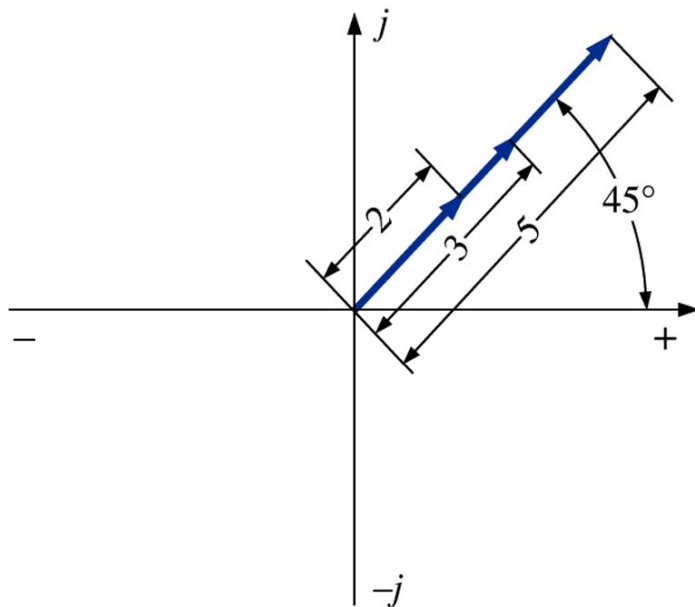
Adição e subtração de números complexos

A adição e a subtração não podem ser realizadas na forma polar, a menos que os números complexos tenham o mesmo ângulo θ ou que sua diferença seja um múltiplo de 180° .

Exemplo 14.21: Adicione os seguintes números complexos:

$$\text{a) } 2\angle 45^\circ + 3\angle 45^\circ = 5\angle 45^\circ$$

$$\text{b) } 2\angle 0^\circ - 4\angle 180^\circ = 6\angle 0^\circ$$



Multiplicação de números complexos

A multiplicação de números complexos é realizada facilmente na **forma polar**:

$$C_1 = Z_1 \angle \theta_1 \qquad C_2 = Z_2 \angle \theta_2$$

$$C_1 \cdot C_2 = \left(Z_1 \angle \theta_1 \right) \cdot \left(Z_2 \angle \theta_2 \right)$$

$$C_1 \cdot C_2 = Z_1 \cdot Z_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

Exemplo 14.23: Multiplique os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 5 \angle 20^\circ$ e $C_2 = 10 \angle 30^\circ$

b) $C_1 = 2 \angle -40^\circ$ e $C_2 = 7 \angle 120^\circ$

Divisão de números complexos

A divisão de números complexos é realizada facilmente na **forma polar**:

$$C_1 = Z_1 \angle \theta_1 \qquad C_2 = Z_2 \angle \theta_2$$
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1 \angle \theta_1}{Z_2 \angle \theta_2} \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

Exemplo 14.25: Divida os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 15 \angle 10^\circ$ e $C_2 = 2 \angle 7^\circ$

b) $C_1 = 8 \angle 120^\circ$ e $C_2 = 16 \angle -50^\circ$

Multiplicação e divisão de números complexos

A multiplicação e a divisão podem ser realizadas com números complexos na forma retangular, mas, no caso da divisão esta operação se torna bastante trabalhosa.

Exemplo 14.22 e 14.24: Multiplique e divida os seguintes números complexos:

a) $(2 + j3) \cdot (5 + j10)$

a) $(1 + j4) / (4 + j5)$

b) $(-2 - j3) \cdot (4 - j6)$

b) $(-4 - j8) / (6 - j1)$

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(X_1X_2 + Y_1Y_2) + j(X_2Y_1 - X_1Y_2)}{X_2^2 + Y_2^2}$$

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

$$\frac{C_1}{C} = \frac{C_1}{C} \cdot \frac{C_2^*}{C_2^*} = \frac{(X_1 + jY_1) \cdot (X_2 - jY_2)}{(X_2 + jY_2) \cdot (X_2 - jY_2)}$$