Apêndice C

Determinantes

Os determinantes são usados para estabelecer o valor das variáveis emsistemas de duas ou mais equações lineares. Uma vez que o procedimento seja entendido perfeitamente, podemos obter as soluções de forma simples e direta, com uma margem de erro muito menor do que quando usamos outros métodos.

Considere as seguintes equações, onde x e y são as incógnitas e a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 são constantes:

Col. 1		Col. 2		Col. 3	
a_1x	$+$	b_1y	$=$	c_1	(C.1a)
a_2x	$+$	b_2y	$=$	c_2	(C.1b)

Uma das maneiras de resolver o problema é explicitar uma das incógnitas na Equação C.1(a) e substituí-la na Equação C.1(b). Ou seja, determinando o valor de x na Equação C.1(a), temos

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

e substituindo o resultado na Equação C.1(b), temos

$$a_2\left(\frac{c_1 - b_1y}{a_1}\right) + b_2y = c_2$$

Agora é possível determinar o valor de y, pois é a única variável que resta, e substituir o resultado em uma das duas equações restantes para obter o valor de x. Esse método pode ser aceitável no caso de umsistema de duas equações, mas se torna muito longo e cansativo para sistemas de três ou mais equações simultâneas.

O uso de determinantes para calcular os valores de x e y requer que o seguinte formato seja estabelecido para cada variável:

$$\begin{array}{cc} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{C.2}$$

Primeiramente, observe que apenas constantes aparecem entre os traços verticais, e que os dois denominadores são iguais. Na verdade, cada um desses denominadores é simplesmente uma lista dos coeficientes de x e y na mesma ordem em que aparecem nas equações C.1(a) e C.1(b). Na solução de x, os coeficientes de x no numerador são substituídos pelas constantes de segundo membro das equações C.1(a) e C.1(b), enquanto os coeficientes de y são mantidos. Na solução de y, os coeficientes de y no numerador são substituídos pelas constantes do segundo membro das equações C.1(a) e C.1(b) e os coeficientes de x são mantidos.

Os blocos que aparecem entre as linhas verticais no numerador e no denominador da Equação C.2 são denominados *determinantes* (D), e podemser calculados numericamente da seguinte forma:

$$\text{Determinante} = D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Col.} & \text{Col.} \\ 1 & 2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{array} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{C.3}$$

O valor expandido é obtido multiplicando-se o elemento do canto superior esquerdo pelo elemento do canto inferior direito e subtraindo do resultado o produto dos dois outros elementos. Esse determinante em particular é denominado determinante de *segunda ordem*, pois possui duas linhas e duas colunas.

É importante lembrar que, quando se usam determinantes, as colunas das equações, conforme indicam as equações C.1(a) e C.1(b), têm de ser colocadas na mesma ordem ao escrever os determinantes. Ou seja, como a_1 e a_2 estão na coluna 1 das equações C.1(a) e C.1(b), eles têm de ser colocados na coluna 1 do determinante (o mesmo se aplica a b_1 e a b_2).

Expandindo toda a expressão para x e y, obtemos o seguinte:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{C.4a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{C.4b}$$

EXEMPLO C.1

Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (3)(2) = 8 - 6 = \mathbf{2}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (6)(-1) = 8 + 6 = \mathbf{14}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (0)(4) - (-2)(-2) = 0 - 4 = \mathbf{-4}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = (0)(10) - (3)(0) = \mathbf{0}$

EXEMPLO C.2

Resolva o sistema determinando x e y:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

Solução:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(4) - (2)(1)}{(2)(4) - (3)(1)} = \frac{12 - 2}{8 - 3} = \frac{10}{5} = \mathbf{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{(2)(2) - (3)(3)}{5} = \frac{4 - 9}{5} = \frac{-5}{5} = \mathbf{-1}$$

Verificação:

$$\begin{aligned} 2x + y &= (2)(2) + (-1) \\ &= 4 - 1 = 3 \qquad \text{(confere)} \\ 3x + 4y &= (3)(2) + (4)(-1) \\ &= 6 - 4 = 2 \qquad \text{(confere)} \end{aligned}$$

EXEMPLO C.3

Resolva o sistema determinando x e y:

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 3 \\ 3x - 2y &= -2 \end{aligned}$$

Solução:

Nesse exemplo, observe o efeito do sinal negativo e o uso de parênteses para assegurar que o sinal correto seja obtido em cada produto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(-2) - (-2)(2)}{(-1)(-2) - (3)(2)}$$

$$= \frac{-6 + 4}{2 - 6} = \frac{-2}{-4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{(-1)(-2) - (3)(3)}{-4}$$

$$= \frac{2 - 9}{-4} = \frac{-7}{-4} = \mathbf{\frac{7}{4}}$$

EXEMPLO C.4

Resolva o sistema determinando x e y:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 4y \\ 20y &= -1 + 3x \end{aligned}$$

Solução:

Nesse caso, as equações têm de ser primeiramente colocadas na mesma forma que nas equações C.1(a) e C.1(b):

$$\begin{aligned} x + 4y &= 3 \\ -3x + 20y &= -1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(20) - (-1)(4)}{(1)(20) - (-3)(4)}$$

$$= \frac{60 + 4}{20 + 12} = \frac{64}{32} = \mathbf{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{32} = \frac{(1)(-1) - (-3)(3)}{32}$$

$$= \frac{-1 + 9}{32} = \frac{8}{32} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

O uso de determinantes não se limita a sistemas de duas equações; os determinantes podemser aplicados a sistemas com qualquer número de equações. Inicialmente, apresentaremos um método que se aplica apenas a determinantes de terceira ordem, caso em que se enquadra a maioria dos problemas deste livro. Emseguida, discutiremos um procedimento geral para resolver sistemas com qualquer número de equações.

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\text{Col. 1}} & & \underline{\text{Col. 2}} & & \underline{\text{Col. 3}} & & \underline{\text{Col. 4}} \\ a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}$$

onde x, y e z são incógnitas e $a_{1,2,3}$, $b_{1,2,3}$, $c_{1,2,3}$ e $d_{1,2,3}$ são constantes.

Os determinantes envolvidos no cálculo de x, y e z podemser obtidos por um método similar ao que foi usado no caso de umsistema de duas equações. Ou seja, no cálculo de x, o determinante do numerador é obtido substituindo-se os elementos da coluna 1 pelos elementos do segundo membro do sistema de equações. O denominador é o determinante dos coeficientes das incógnitas (o mesmo se aplica às incógnitas y e z). Novamente, o denominador é igual para as três incógnitas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

onde $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Um método manual para calcular o determinante de terceira ordem consiste simplesmente em repetir as duas primeiras colunas do determinante à direita do determinante e somar os produtos dos elementos que pertencem a diagonais específicas, da forma indicada a seguir:

$$D = \begin{array}{c|ccc|cc} & & & 4(-) & 5(-) & 6(-) \\ & a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ & a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ & & & 1(+) & 2(+) & 3(+) \end{array}$$

Os produtos associados às diagonais 1, 2 e 3 são positivos, e sua soma é dada por:

$$+ a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3$$

Os produtos associados às diagonais 4, 5 e 6 são negativos, e sua soma é dada por:

$$- a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

O resultado final é a soma das diagonais 1, 2 e 3, menos a soma das diagonais 4, 5 e 6:

$$\boxed{\begin{aligned} &+(a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) \\ &-(a_3b_2c_1 + b_3c_2c_1 + c_3a_2b_1) \end{aligned}} \qquad \text{(C.5)}$$

Atenção: esse método de expansão é válido apenas para determinantes de terceira ordem! Ele não pode ser aplicado a sistemas iguais ou superiores a quatro .

EXEMPLO C.5

Calcule o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{array}{|ccc|cc} & & (-) & (-) & (-) \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ & & (+) & (+) & (+) \end{array}$$

Solução:

$$\begin{aligned} &[(1)(1)(2) + (2)(0)(0) + (3)(-2)(4)] \\ &\quad - [(0)(1)(3) + (4)(0)(1) + (2)(-2)(2)] \\ &\quad = (2 + 0 - 24) - (0 + 0 - 8) = (-22) - (-8) \\ &\quad = -22 + 8 = \mathbf{-14} \end{aligned}$$

EXEMPLO C.6

Resolva o sistema determinando x, y e z:

$$\begin{aligned} 1x + 0y - 2z &= -1 \\ 0x + 3y + 1z &= +2 \\ 1x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Solução:

$$x = \frac{\begin{array}{|ccc|cc} -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}}{\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}[(-1)(3)(3) + (0)(1)(0) + (-2)(2)(2)] - [(0)(3)(-2) \\ + (2)(1)(-1) + (3)(2)(0)]\end{array}}{\begin{array}{c}[(1)(3)(3) + (0)(1)(1) + (-2)(0)(2)] - [(1)(3)(-2) \\ + (2)(1)(1) + (3)(0)(0)]\end{array}}$$

$$= \frac{(-9 + 0 - 8) - (0 - 2 + 0)}{(9 + 0 + 0) - (-6 + 2 + 0)}$$

$$= \frac{-17 + 2}{9 + 4} = -\mathbf{\frac{15}{13}}$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{array}}{13}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}[(1)(2)(3) + (-1)(1)(1) + (-2)(0)(0)] - [(1)(2)(-2) \\ + (0)(1)(1) + (3)(0)(-1)]\end{array}}{13}$$

$$= \frac{(6 - 1 + 0) - (-4 + 0 + 0)}{13}$$

$$= \frac{5 + 4}{13} = \mathbf{\frac{9}{13}}$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}}{13}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}[(1)(3)(0) + (0)(2)(1) + (-1)(0)(2)] - [(1)(3)(-1) \\ + (2)(2)(1) + (0)(0)(0)]\end{array}}{13}$$

$$= \frac{(0 + 0 + 0) - (-3 + 4 + 0)}{13}$$

$$= \frac{0 - 1}{13} = -\mathbf{\frac{1}{13}}$$

ou, a partir de $0x + 3y + 1z = +2$,

$$z = 2 - 3y = 2 - 3\left(\frac{9}{13}\right) = \frac{26}{13} - \frac{27}{13} = -\mathbf{\frac{1}{13}}$$

Verificação:

$$\left.\begin{array}{l} 1x + 0y - 2z = -1 \\ 0x + 3y + 1z = +2 \\ 1x + 2y + 3z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{15}{13} + 0 + \frac{2}{13} = -1 \\ 0 + \frac{27}{13} + \frac{-1}{13} = +2 \\ -\frac{15}{13} + \frac{18}{13} + \frac{-3}{13} = 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}\right\} \begin{array}{l} -\frac{13}{13} = -1\checkmark \\ \frac{26}{13} = +2\checkmark \\ -\frac{18}{13} + \frac{18}{13} = 0\checkmark \end{array}$$

A abordagem geral de determinantes iguais ou superiores a três necessita que o determinante seja expandido da forma mostrada a seguir. Existe mais que uma expansão geradora do resultado correto, mas esta forma é normalmente empregada em uma análise introdutória.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fator} \\ \text{multiplicante}}}{a_1} \underbrace{\left(+\underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Menor}}\right)}_{\text{Cofator}} +$$

$$+ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fator} \\ \text{multiplicante}}}{b_1} \underbrace{\left(-\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Menor}}\right)}_{\text{Cofator}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fator} \\ \text{multiplicante}}}{c_1} \underbrace{\left(+\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{Menor}}\right)}_{\text{Cofator}}$$

Essa expansão foi obtida multiplicando-se os elementos da primeira linha de D pelos cofatores correspondentes. Não é necessário que os fatores multiplicadores pertençam à primeira linha. Na verdade, qualquer *linha* ou *coluna* (não as diagonais) pode ser usada para expandir um determinante de terceira ordem.

O sinal de cada cofator depende da posição do fator multiplicador correspondente (a_1, b_1 e c_1, nesse caso), de acordo com o seguinte esquema:

$$\left|\begin{array}{ccc} + \rightarrow & - & + \\ \downarrow & & \\ - & + & - \\ & & \\ + & - & + \end{array}\right|$$

Observe que o sinal correto de cada elemento pode ser obtido atribuindo-se o sinal positivo ao elemento situado no canto superior esquerdo e atribuindo-se alternadamente sinais negativos e positivos aos elementos vizinhos, tanto no sentido horizontal como no vertical.

No caso de um determinante D, os elementos têm os seguintes sinais:

$$\begin{vmatrix} a_1^{(+)} & b_1^{(-)} & c_1^{(+)} \\ a_2^{(-)} & b_2^{(+)} & c_2^{(-)} \\ a_3^{(+)} & b_3^{(-)} & c_3^{(+)} \end{vmatrix}$$

Os menores complementares associados a cada fator multiplicativo são obtidos eliminando-se a linha e a coluna nas quais o fator multiplicativo está localizado e escrevendo-se um determinante de segunda ordem com os elementos restantes, nas mesmas posições relativas que tinham no determinante de terceira ordem.

Considere os cofatores associados a a_1 e b_1 na expansão de D. O sinal é positivo para a_1 e negativo para

b_1, como determina o esquema-padrão. De acordo com o método que acabamos de descrever, podemos encontrar os menores complementares de a_1 e b_1 da seguinte forma:

$$a_{1(\text{menor})} = \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$b_{1(\text{menor})} = \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ a_2 & \cancel{b_2} & c_2 \\ a_3 & \cancel{b_3} & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Como já dissemos, qualquer linha ou coluna pode ser usada para expandir o determinante de terceira ordem. Usando a primeira coluna de D, obteremos a expansão

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\left(+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\ a_2\left(-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) + a_3\left(+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)$$

Às vezes, a escolha de uma certa linha ou coluna pode facilitar consideravelmente o trabalho de expandir o determinante de terceira ordem. Por exemplo, nos determinantes a seguir, a primeira coluna e a terceira linha, respectivamente, reduziriam o número de cofatores na expansão:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\left(+\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}\right) + 0 + 0 = 2(28 - 30)$$
$$= \mathbf{-4}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\left(+\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}\right) + 0 + 3\left(+\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\right)$$
$$= 2(32 - 42) + 3(6 - 8) = 2(-10) + 3(-2)$$
$$= \mathbf{-26}$$

EXEMPLO C.7

Expanda os seguintes determinantes de terceira ordem:

a) $$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\left(+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) + 3\left(-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) +$$
$$+\ 2\left(+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 1[6 - 1] + 3[-(6 - 3)] + 2[2 - 6]$$
$$= 5 + 3(-3) + 2(-4)$$
$$= 5 - 9 - 8$$
$$= \mathbf{-12}$$

b) $$D = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2\left(-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right) +$$
$$+\ 8\left(+\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 0 + 2[-(0 - 24)] + 8[(20 - 0)]$$
$$= 0 + 2(24) + 8(20)$$
$$= 48 + 160$$
$$= \mathbf{208}$$