

# Circuitos não senoidais

# 25

## Objetivos

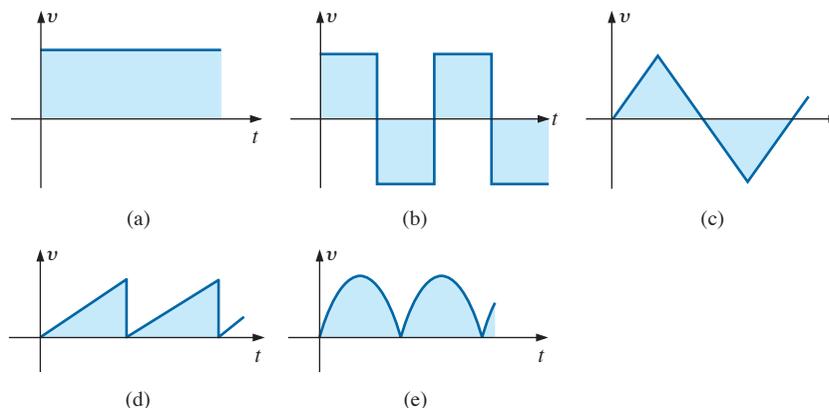
- Familiarizar-se com os componentes da expansão da série de Fourier para qualquer função senoidal ou não senoidal.
- Entender como a aparência e gráfico do eixo do tempo de uma forma de onda podem identificar quais termos de uma série de Fourier estarão presentes.
- Poder determinar a resposta de um circuito a qualquer entrada definida por uma expansão da série de Fourier.
- Aprender a acrescentar duas ou mais formas de onda definidas pelas expansões da série de Fourier.

## 25.1 INTRODUÇÃO

Toda forma de onda que difere da descrição básica da forma de onda senoidal é denominada **não senoidal**. As formas de onda não senoidais mais comuns são as formas de onda contínua, quadrada, triangular, dente de serra e senoide retificada, mostradas na Figura 25.1.

O sinal de saída de muitos dispositivos elétricos e eletrônicos pode ser não senoidal, mesmo que o sinal aplicado o seja. Por exemplo, o circuito mostrado na Figura

25.2 usa um diodo para eliminar os semiciclos negativos do sinal de entrada em um processo denominado *retificação de meia onda*, que é usado para transformar corrente alternada em contínua. Em um curso de eletrônica, você terá a oportunidade de aprender que o diodo é semelhante a uma chave mecânica, porém ele é um dispositivo que só conduz corrente em um sentido. A forma de onda de saída é definitivamente não senoidal, mas ela tem o mesmo período que o sinal senoidal de entrada e é proporcional a ele durante metade de cada período.



**Figura 25.1** Algumas das formas de onda não senoidais mais comuns: (a) contínua; (b) quadrada; (c) triangular; (d) dente de serra; (e) senoide retificada.

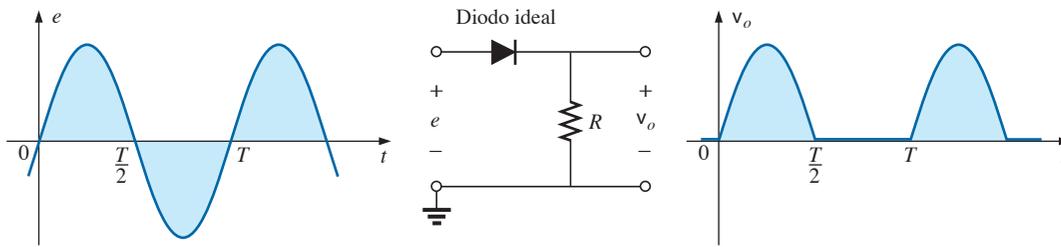


Figura 25.2 O circuito retificador de meia onda produz uma forma de onda não senoidal.

Neste capítulo, mostraremos como uma forma de onda não senoidal, como a que vemos na Figura 25.2, pode ser representada por uma série de termos. O leitor aprenderá também a calcular a resposta de um circuito a um sinal de entrada não senoidal.

## 25.2 SÉRIES DE FOURIER

O nome **série de Fourier** refere-se a uma série de termos desenvolvida em 1822 pelo Barão Jean Fourier (veja a Figura 25.3), que pode ser usada para representar uma função periódica não senoidal. Na análise dessas formas de onda, calculamos cada termo na série de Fourier:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & \underbrace{A_0}_{\text{valor médio ou CC}} + \underbrace{A_1 \text{ sen } \omega t + A_2 \text{ sen } 2\omega t + A_3 \text{ sen } 3\omega t + \dots + A_n \text{ sen } n\omega t}_{\text{termos em seno}} \\
 & + \underbrace{B_1 \text{ cos } \omega t + B_2 \text{ cos } 2\omega t + B_3 \text{ cos } 3\omega t + \dots + B_n \text{ cos } n\omega t}_{\text{termos em cosseno}}
 \end{aligned}
 \tag{25.1}$$

Dependendo da forma de onda, pode ser necessário um grande número de termos na equação anterior para expressar a função com uma precisão aceitável do ponto de vista da análise de circuitos.

De acordo com a Equação 25.1, a série de Fourier pode ser dividida em três partes. A primeira é o termo relativo à componente contínua  $A_0$ , que é o valor médio da forma de onda para um ciclo completo. A segunda é uma série de termos em seno. Não existem restrições quanto aos valores das amplitudes dos termos em seno, porém, cada um deles tem uma frequência que é o múltiplo inteiro da frequência do primeiro termo da série. A terceira parte é uma série de termos em cosseno. Nesse caso, também não existem restrições quanto aos valores das amplitudes dos termos, porém, cada um tem uma frequência que é o múltiplo inteiro da frequência do primeiro termo em cosseno. Para determinada forma de onda, é possível que todos os termos em seno *ou* todos os termos em cosseno sejam nulos. Características desse tipo podem ser determinadas

analisando-se a forma de onda não senoidal e sua posição relativa ao eixo horizontal.

O primeiro termo das séries em seno e em cosseno é denominado **componente fundamental**. Essa componente representa o termo de menor frequência necessário para representar uma determinada função, e também tem a mesma frequência que a forma de onda original. Portanto, o termo fundamental tem de constar em qualquer representação em séries de Fourier. Os outros termos com frequências de ordem maior (frequências múltiplas da fundamental) são denominados **termos harmônicos**. Um termo com uma frequência duas vezes maior do que a componente fundamental é chamado segundo harmônico; se a frequência for três vezes maior, é chamado terceiro harmônico; e assim por diante.



Figura 25.3 Barão Jean Fourier. (Smithsonian Institute Library.)

Foto N° 56.822

**Francês** (Auxerre, Grenoble, Paris) **(1768-1830)**

**Matemático, egiptologista e administrador**

**Professor de Matemática**, École Polytechnique.

Fourier é mais conhecido pela série matemática infinita de termos em seno e cosseno denominadas *séries de Fourier*, por ele utilizadas para o estudo da condução de calor em sólidos. Embora fosse essencialmente um matemático, grande parte de seu trabalho está ligado ao estudo de fenômenos físicos como transferência de calor, manchas solares e clima. Fourier fez parte do primeiro grupo de professores da École Polytechnique, em Paris. Napoleão requisitou seus serviços como pesquisador de antiguidades egípcias, fazendo com que ele passasse três anos no Egito como secretário do Institut d'Égypte. Em 1809, foi agraciado com o título de barão por Napoleão, e, em 1817, foi eleito para a Académie des Sciences.

### Valor médio: $A_0$

O termo da componente contínua da série de Fourier é o valor médio da forma de onda para um ciclo completo. Se as áreas acima e abaixo do eixo horizontal forem iguais, em um período completo,  $A_0 = 0$ , e o termo CC não aparece na expansão. Se a área acima do eixo horizontal for maior,  $A_0$  é positivo e aparecerá na representação da série de Fourier. Se a área abaixo do eixo horizontal for maior,  $A_0$  é negativo e aparecerá com o sinal negativo na expansão.

### Funções ímpares (simetria central)

Quando o valor de uma função para  $+t$  é o negativo do valor da função para  $-t$ , dizemos que a função é ímpar ou possui simetria central.

A Figura 25.4(a) mostra um exemplo de uma forma de onda com simetria central. Observe que a forma de onda tem valor máximo em  $t_1$ , que é igual em valor absoluto (com sinal oposto) ao valor máximo que ocorre em  $-t_1$ . Para formas de onda desse tipo, todos os parâmetros  $B_{1 \rightarrow \infty}$  da Equação 25.1 são nulos. De fato,

as formas de onda com simetria central podem ser descritas completamente usando-se apenas os termos CC e seno da série de Fourier.

Observe na Figura 25.4(b) que uma senoide é uma função ímpar com simetria central.

Para as duas formas de onda mostradas na Figura 25.4, a relação matemática a seguir pode ser escrita:

$$f(t) = -f(-t) \quad (\text{função ímpar}) \quad (25.2)$$

Expresso em palavras, o valor da função em  $+t$  é o mesmo que o negativo da magnitude em  $-t$  ( $t_1$  na Figura 25.4(a)).

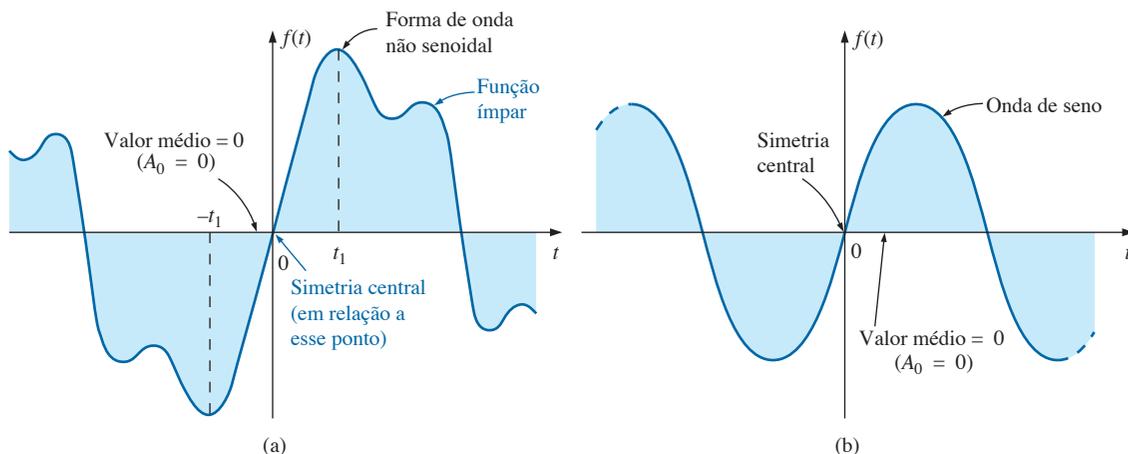


Figura 25.4 Simetria central.

### Funções pares (simetria axial)

Se uma forma de onda é simétrica em relação ao eixo vertical, dizemos que a função é par ou possui simetria axial.

A Figura 25.5(a) mostra um exemplo de uma forma de onda com simetria axial. Observe que o valor da função em  $t_1$  é igual ao valor em  $-t_1$ . Para formas de onda desse tipo, todos os parâmetros  $A_{1 \rightarrow \infty}$  são nulos. Na verdade,

as formas de onda com simetria axial podem ser descritas completamente usando-se apenas os termos CC e cosseno da série de Fourier.

Observe na Figura 25.5(b) que uma cossenoide é uma função par com simetria axial.

Para as duas formas de onda mostradas na Figura 25.5, a seguinte relação matemática pode ser escrita:

$$f(t) = f(-t) \quad (\text{função par}) \quad (25.3)$$

Expresso em palavras, o valor da função em  $+t$  é o mesmo que em  $-t$  ( $t_1$  na Figura 25.5(a)).

### Simetria especular ou de meia-onda

Quando uma função apresenta simetria especular ou de meia-onda, como a forma de onda da Figura 25.6, os harmônicos pares dos termos seno e cosseno serão nulos.

Em forma funcional, a forma de onda precisa satisfazer a seguinte relação:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad (25.4)$$

A Equação 25.4 expressa o fato de que a forma de onda em um intervalo  $T/2$  se repete no intervalo seguinte,

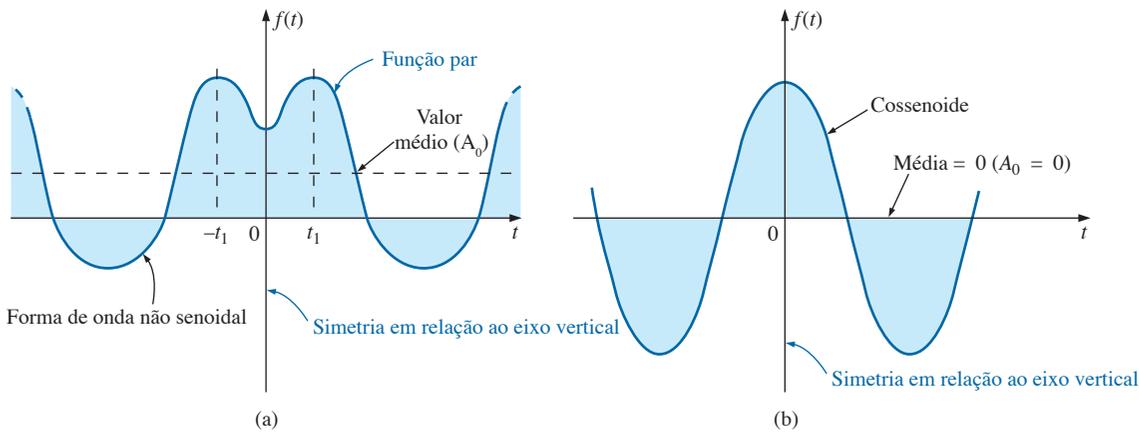


Figura 25.5 Simetria axial.

mas com o sinal invertido ( $t_1$  na Figura 25.6). Por exemplo, o intervalo de zero a  $T/2$  da forma de onda mostrada na Figura 25.6 repete-se no intervalo de  $T/2$  a  $T$ , porém, na parte de baixo do eixo horizontal.

### Simetria de meio-ciclo

A natureza repetitiva de uma forma de onda pode ser determinada se certas componentes harmônicas estiverem presentes na expansão da série de Fourier. Em particular,

*se uma forma de onda é repetitiva no meio-ciclo, como demonstrado pela forma de onda mostrada na Figura 25.7, os harmônicos ímpares das séries de termos em seno e cosseno são nulos.*

Em forma funcional, a forma de onda precisa satisfazer a seguinte relação:

$$f(t) = f\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad (25.5)$$

A Equação 25.5 expressa o fato de que a função se repete após cada intervalo de tempo  $T/2$  ( $t_1$  na Figura 25.7). Entretanto, a forma de onda também se repete após cada período  $T$ . Em geral, para uma função desse tipo, se o período  $T$  da forma de onda é escolhido de modo a ser o dobro do período mínimo ( $T/2$ ), os harmônicos de ordem ímpar serão nulos.

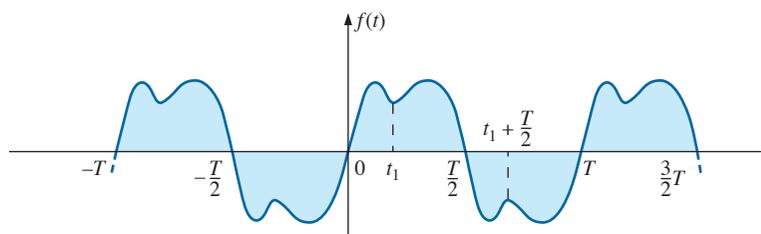


Figura 25.6 Simetria especular.

### Abordagem matemática

Os coeficientes  $A_0$ ,  $A_{1 \rightarrow n}$ , e  $B_{1 \rightarrow n}$  podem ser determinados usando-se as seguintes equações com cálculo integral:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (25.6)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen } n\omega t dt \quad (25.7)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{cos } n\omega t dt \quad (25.8)$$

Essas equações foram apresentadas apenas para ilustrar as equações gerais para o cálculo dos coeficientes; elas não serão usadas nas análises a seguir.

### Instrumentação

Existem três instrumentos que permitem determinar as componentes contínua, fundamental e harmônica de uma forma de onda: o *analisador espectral*, o *analisador de onda* e o *analisador de Fourier*. O objetivo desses instrumentos não se resume apenas em determinar a composição espectral de uma forma de onda em particular, mas também avaliar a quantidade de distorção que um circuito

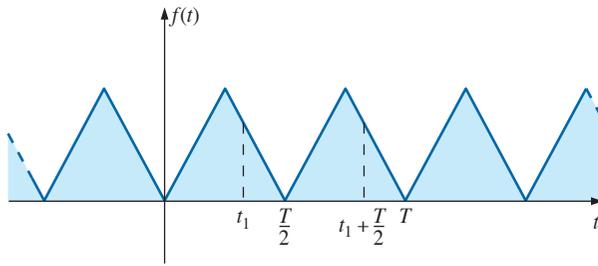


Figura 25.7 Simetria de meio ciclo.

pode causar a um sinal. Por exemplo, um amplificador pode aumentar a amplitude do sinal aplicado por um fator de 50, mas também pode introduzir no processo uma distorção da forma de onda que seria difícil de observar na tela de um osciloscópio. A quantidade dessa distorção apareceria na forma de harmônicos cujas frequências são múltiplas da frequência do sinal aplicado. Qualquer um dos instrumentos mencionados anteriormente poderia ser usado para descobrir quais são as principais frequências responsáveis pela distorção, o que permite removê-las do sinal de saída com o auxílio de filtros adequados.

O analisador espectral tem a aparência de um osciloscópio, como mostra a Figura 25.8, mas em vez de exibir na tela uma forma de onda que é um gráfico da tensão (eixo vertical) em função do tempo (eixo horizontal), mostra um gráfico da intensidade em dB (eixo vertical) em função da frequência (eixo horizontal). Dizemos que esse gráfico está no *domínio da frequência*, ao contrário do gráfico visto em um osciloscópio comum, que está no *domínio do tempo*. A altura do traço que vemos na tela mostrada na Figura 25.8 indica a importância relativa da frequência correspondente para o sinal. Os analisadores espectrais não são capazes de medir o ângulo de fase associado a cada componente do sinal.



Figura 25.8 Analisador espectral. (Cortesia da Hewlett-Packard.)

**EXEMPLO 25.1**

Determine quais componentes da série de Fourier estão presentes nas formas de onda mostradas na Figura 25.9.

Solução:

a) A forma de onda tem uma área sob a curva que está acima do eixo horizontal, tendo, portanto, um **termo CC  $A_0$  positivo**.

A forma de onda tem uma simetria axial, resultando em **apenas os termos em cosseno** na expansão da série.

A forma de onda tem simetria de meio-ciclo, resultando em **apenas os termos pares** em cosseno da série.

b) A forma de onda tem áreas iguais acima e abaixo do eixo horizontal em cada período, resultando em  **$A_0 = 0$** .

A forma de onda tem simetria central, resultando em **apenas os termos em seno** presentes na expansão.

**EXEMPLO 25.2**

Escreva as expansões em série de Fourier das formas de onda mostradas na Figura 25.10.

Solução:

a)  $A_0 = 20$      $A_{1 \rightarrow n} = 0$      $B_{1 \rightarrow n} = 0$   
 $v = 20$

b)  $A_0 = 0$      $A_1 = 5 \times 10^{-3}$      $A_{2 \rightarrow n} = 0$      $B_{1 \rightarrow n} = 0$   
 $i = 5 \times 10^{-3} \text{ sen } \omega t$

c)  $A_0 = 8$      $A_{1 \rightarrow n} = 0$      $B_1 = 12$      $B_{2 \rightarrow n} = 0$   
 $v = 8 + 12 \text{ cos } \omega t$

**EXEMPLO 25.3**

Esboce o gráfico da seguinte expansão em série de Fourier:

$$v = 2 + 1 \text{ cos } \alpha + 2 \text{ sen } \alpha$$

Solução:

Observe a Figura 25.11.

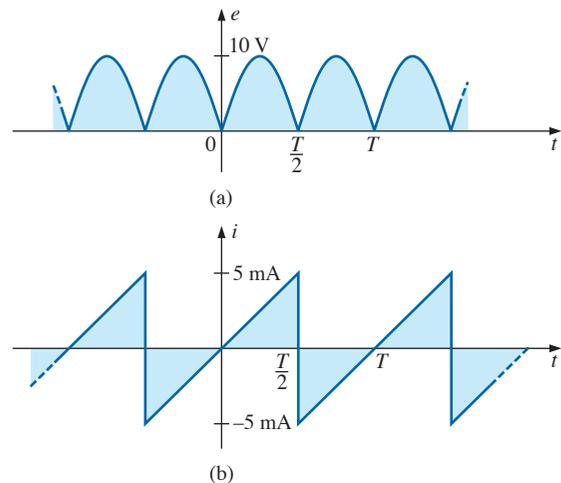


Figura 25.9 Exemplo 25.1.

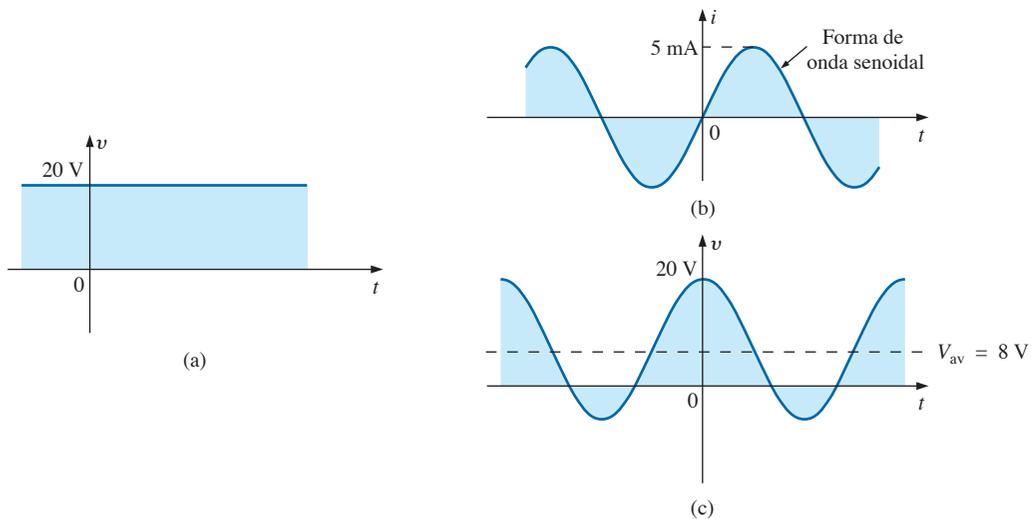


Figura 25.10 Exemplo 25.2.

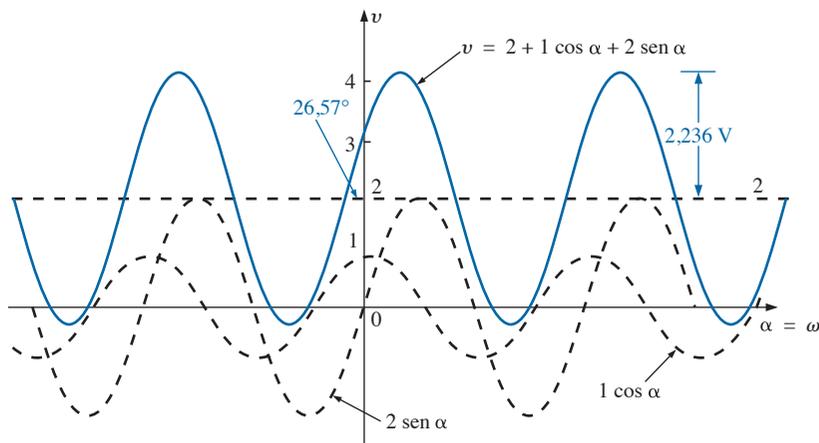


Figura 25.11 Exemplo 25.3.

A solução pode ser obtida graficamente, plotando-se as três funções no mesmo gráfico e somando-as ponto a ponto ou usando-se a álgebra fasorial da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 1 \cos \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha &= 1 \text{ V} \angle 90^\circ + 2 \text{ V} \angle 0^\circ = j 1 \text{ V} + 2 \text{ V} \\
 &= 2 \text{ V} + j 1 \text{ V} = 2,236 \text{ V} \angle 26,57^\circ \\
 &= 2,236 \operatorname{sen}(\alpha + 26,57^\circ)
 \end{aligned}$$

e 
$$v = 2 + 2,236 \operatorname{sen}(\alpha + 26,57^\circ)$$

que é simplesmente uma onda senoidal superposta a um nível CC de 2 V. Ou seja, seu valor máximo positivo é  $2 \text{ V} + 2,236 \text{ V} = 4,236 \text{ V}$ , e seu valor mínimo é  $2 \text{ V} - 2,236 = -0,236 \text{ V}$ .

**EXEMPLO 25.4**

Esboce o gráfico da seguinte expansão em série de Fourier:

$$i = 1 \operatorname{sen} \omega t + 1 \operatorname{sen} 2\omega t$$

Solução:

Veja a Figura 25.12. Note que nesse caso a soma de duas senoides de frequências diferentes *não* resulta em uma senoide. Lembre-se de que a álgebra dos fasores pode ser aplicada somente a formas de onda com a *mesma* frequência. Nesse caso, a solução deve ser obtida graficamente ponto a ponto, como é mostrado para  $t = t_1$ .

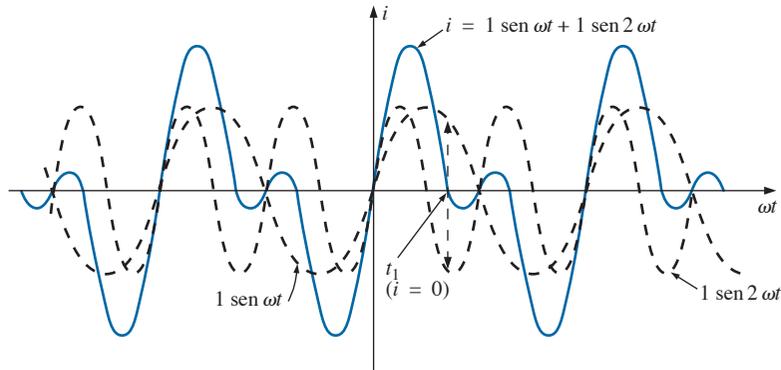


Figura 25.12 Exemplo 25.4.

Como exemplo adicional do uso das séries de Fourier, considere a onda quadrada vista na Figura 25.13. O valor médio é nulo, então  $A_0 = 0$ . Como se trata de uma função ímpar, todos os coeficientes  $B_{1 \rightarrow n}$  também são nulos; apenas os termos em seno aparecem na expansão em série. Como essa forma de onda satisfaz o critério em que  $f(t) = -f(t + T/2)$ , os harmônicos pares também são nulos.

Após calcularmos os diversos coeficientes usando a Equação 25.8, obtemos

$$v = \frac{4}{\pi} V_m \left( \text{sen } \omega t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\omega t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\omega t + \frac{1}{7} \text{sen } 7\omega t + \dots + \frac{1}{n} \text{sen } n\omega t \right) \quad (25.9)$$

Observe que a componente fundamental tem realmente a mesma frequência que a onda quadrada. Se somarmos a componente fundamental e o terceiro harmônico, obteremos o resultado mostrado na Figura 25.14.

Mesmo usando somente os dois primeiros termos, notamos que começam a aparecer algumas das características da onda quadrada. Se adicionarmos os dois termos seguintes da expansão (veja a Figura 25.15), os pulsos ficarão mais extensos e com maior número de picos.

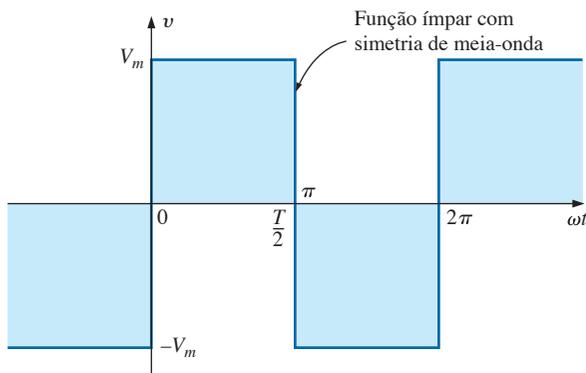


Figura 25.13 Onda quadrada.

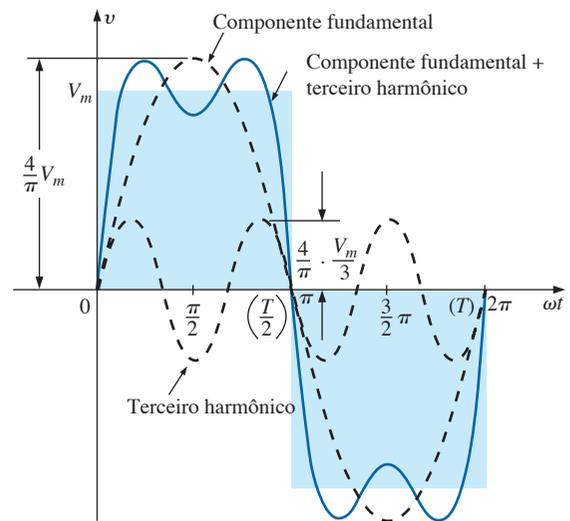


Figura 25.14 Adição da componente fundamental com o terceiro harmônico.

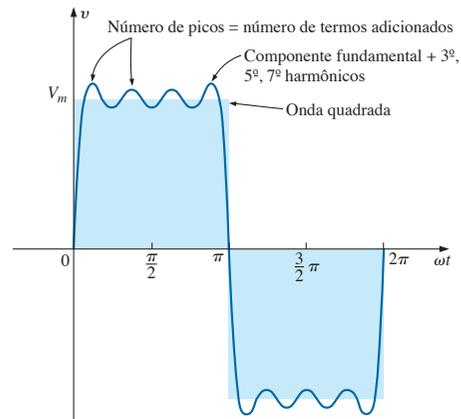


Figura 25.15 Adição da componente fundamental com o terceiro, o quinto e o sétimo harmônicos.

À medida que adicionamos mais termos, a série se torna uma aproximação cada vez melhor da onda quadrada. Entretanto, observe que a amplitude dos termos sucessivos diminui até se tornar desprezível quando comparada com a

dos termos iniciais. Uma boa aproximação seria considerar que a forma de onda pode ser representada pela soma dos nove primeiros harmônicos. Qualquer harmônico de ordem maior seria menor que um décimo da componente fundamental. Se deslocássemos verticalmente a forma de onda que acabamos de analisar para cima ou para baixo, a única alteração na série de Fourier seria uma variação do termo relativo ao valor CC. O gráfico mostrado na Figura 25.16(c), por exemplo, é a soma das formas de onda das figuras 25.16(a) e (b). A série de Fourier para a forma de onda resultante é, portanto,

$$v = v_1 + v_2 = V_m + \text{Equação 25.9}$$

$$= V_m + \frac{4}{\pi} V_m \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$$

e  $v = V_m \left[ 1 + \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right) \right]$

A equação da forma de onda retificada de meia-onda mostrada na Figura 25.17(b) é

$$v_2 = 0,318V_m + 0,500V_m \sin \alpha - 0,212V_m \cos \alpha - 0,0424V_m \cos 4\alpha - \dots \quad (25.10)$$

A forma de onda mostrada na Figura 25.17(c) é a soma das formas de onda mostradas na Figura 25.17(a) e (b). A expansão em série de Fourier da forma de onda mostrada na Figura 25.17(c) é, portanto,

$$v_T = v_1 + v_2 = -\frac{V_m}{2} + \text{Equação 25.10}$$

$$= -0,500V_m + 0,318V_m + 0,500V_m \sin \alpha - 0,212V_m \cos 2\alpha - 0,0424V_m \cos 4\alpha + \dots$$

e  $v_T = -0,182V_m + 0,5V_m \sin \alpha - 0,212V_m \cos 2\alpha - 0,0424V_m \cos 4\alpha + \dots$

Se a forma de onda mostrada na Figura 25.17(b) ou (c) for deslocada para a esquerda ou direita, será preciso somar ou subtrair, respectivamente, um deslocamento de fase aos termos em seno e cosseno da série de Fourier

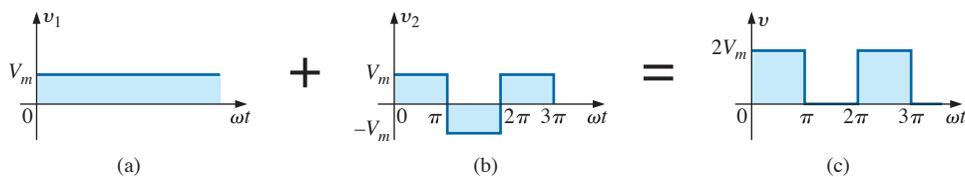


Figura 25.16

Deslocamento vertical de uma forma de onda pela adição de uma componente contínua.

correspondentes; o termo da componente contínua não será afetado com um deslocamento para a direita ou para a esquerda.

Se o sinal retificado em meia-onda é deslocado 90° para a esquerda, como na Figura 25.18, a série de Fourier se torna

$$v = 0,318V_m + 0,500V_m \underbrace{\sin(\alpha + 90^\circ)}_{\cos \alpha} - 0,212V_m \cos 2(\alpha + 90^\circ) - 0,0424V_m \cos 4(\alpha + 90^\circ) + \dots$$

$$= 0,318V_m + 0,500V_m \cos \alpha - 0,212V_m \cos(2\alpha + 180^\circ) - 0,0424V_m \cos(4\alpha + 360^\circ) + \dots$$

$$v = 0,318V_m + 0,500V_m \cos \alpha + 0,212V_m \cos 2\alpha - 0,0424V_m \cos 4\alpha + \dots$$

### 25.3 RESPOSTA DE UM CIRCUITO A UM SINAL NÃO SENOIDAL

A representação que usa as séries de Fourier de um sinal não senoidal pode ser aplicada a um circuito linear que usa o princípio da superposição. Como vimos, esse princípio permite considerar separadamente os efeitos de cada fonte de um circuito. Se substituirmos o sinal não senoidal por um número de termos da série de Fourier suficiente para reduzi-lo com uma precisão satisfatória, podemos usar o teorema da superposição para encontrar a resposta do circuito para cada termo (veja a Figura 25.19).

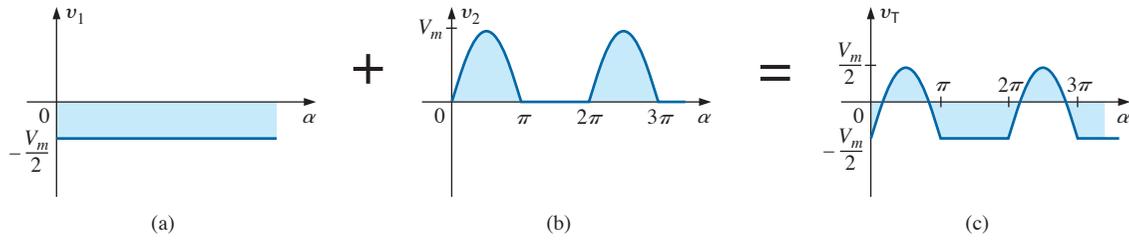
A resposta total do sistema, então, é a soma algébrica dos valores obtidos para cada termo. A principal diferença entre o uso do princípio da superposição para estudar circuitos não senoidais e as aplicações discutidas anteriormente é que a frequência será diferente para cada termo no caso do sinal não senoidal. Portanto, as reatâncias

$$X_L = 2\pi fL \quad \text{e} \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

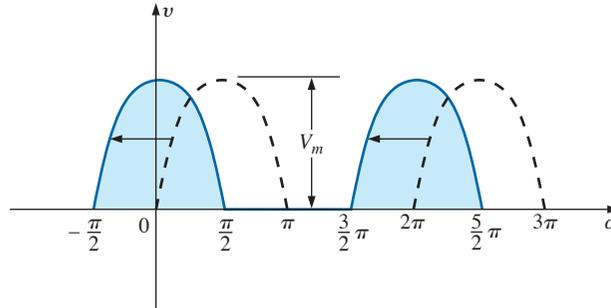
terão valores diferentes para cada termo da tensão ou da corrente do sinal.

Como vimos no Capítulo 13, o valor rms de qualquer forma de onda é dado por

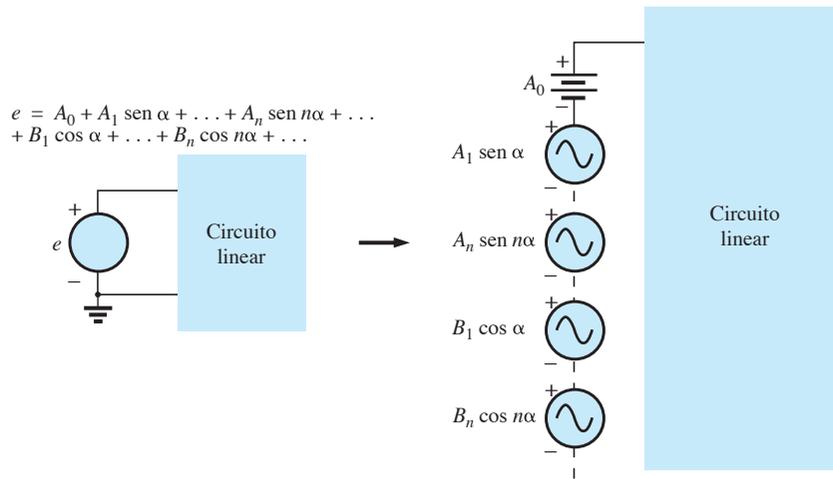
$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$$



**Figura 25.17** Rebaixamento de uma forma de onda pela adição de uma componente contínua negativa.



**Figura 25.18** Modificação do ângulo de fase de uma forma de onda.



**Figura 25.19** Aplicação de uma série de termos de Fourier a um circuito linear.

Se aplicarmos essa equação à seguinte série de Fourier

$$v(\alpha) = V_0 + V_{m_1} \text{sen } \alpha + \dots + V_{m_n} \text{sen } n\alpha + V'_{m_1} \text{cos } \alpha + \dots + V'_{m_n} \text{cos } n\alpha$$

então

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{V_{m_1}^2 + \dots + V_{m_n}^2 + V'^2_{m_1} + \dots + V'^2_{m_n}}{2}} \quad (25.11)$$

Entretanto, como

$$\frac{V_{m_1}^2}{2} = \left(\frac{V_{m_1}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{V_{m_1}}{\sqrt{2}}\right) = (V_{1\text{rms}})(V_{1\text{rms}}) = V_{1\text{rms}}^2$$

então

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + V_{1\text{rms}}^2 + \dots + V_{n\text{rms}}^2 + V'^2_{1\text{rms}} + \dots + V'^2_{n\text{rms}}} \quad (25.12)$$

Da mesma forma, para

$$i(\alpha) = I_0 + I_{m_1} \sin \alpha + \dots + I_{m_n} \sin n\alpha + I'_{m_1} \cos \alpha + \dots + I'_{m_n} \cos n\alpha$$

temos

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m_1}^2 + \dots + I_{m_n}^2 + I'_{m_1}^2 + \dots + I'_{m_n}^2}{2}} \quad (25.13)$$

e

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{I_0^2 + I_{1\text{rms}}^2 + \dots + I_{n\text{rms}}^2 + I'_{1\text{rms}}^2 + \dots + I'_{n\text{rms}}^2} \quad (25.14)$$

A potência total fornecida é a soma das potências associadas aos diferentes termos de tensão e de corrente. Nas equações a seguir, todos os valores de tensão e corrente são eficazes:

$$P_T = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos \theta_1 + \dots + V_n I_n \cos \theta_n + \dots \quad (25.15)$$

$$P_T = I_0^2 R + I_1^2 R + \dots + I_n^2 R + \dots \quad (25.16)$$

ou 
$$P_T = I_{\text{rms}}^2 R \quad (25.17)$$

onde  $I_{\text{rms}}$  é definida pela Equação 25.13 e, da mesma forma,

$$P_T = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad (25.18)$$

onde  $V_{\text{rms}}$  é definida pela Equação 25.11.

**EXEMPLO 25.5**

a) Esboce a forma de onda resultante da combinação de fontes mostradas na Figura 25.20.

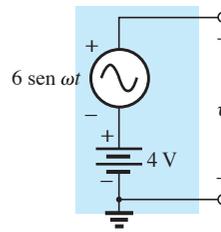
b) Calcule o valor rms do sinal mostrado na Figura 25.20.

Solução:

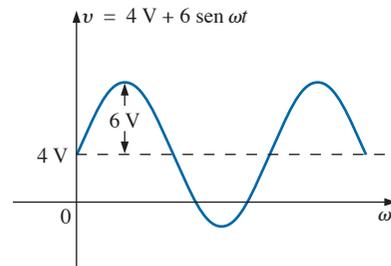
a) Veja a Figura 25.21.

b) Para a Equação 25.12:

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}} &= \sqrt{V_0^2 + \frac{V_m^2}{2}} \\ &= \sqrt{(4 \text{ V})^2 + \frac{(6 \text{ V})^2}{2}} = \sqrt{16 + \frac{36}{2}} \text{ V} = \sqrt{34} \text{ V} \\ &= 5,83 \text{ V} \end{aligned}$$



**Figura 25.20** Exemplo 25.5.



**Figura 25.21** Forma de onda gerada pela fonte mostrada na Figura 25.20.

É interessante notar no Exemplo 25.5 que o valor rms de uma forma de onda com uma componente contínua e outra alternada não é simplesmente a soma dos valores efetivos de cada uma. Em outras palavras, seria uma tentação dispensar a Equação 25.12 e dizer que  $V_{\text{rms}} = 4 \text{ V} + 0,707 (6 \text{ V}) = 8,24 \text{ V}$ , o que é incorreto e, na verdade, excede o valor correto em 41 por cento.

**Instrumentação**

É importante saber que nem todo multímetro digital é capaz de medir o valor rms de formas de onda não senoidais como a que aparece na Figura 25.21. Muitos desses aparelhos são projetados para medir o valor rms apenas de formas de onda senoidais. É importante ler o manual do instrumento para verificar se o mesmo é um multímetro rms verdadeiro (*true rms*), capaz de medir o valor rms de qualquer forma de onda.

Aprendemos no Capítulo 13 que o valor rms de uma onda quadrada é igual ao valor de pico da forma de onda. Verificaremos esse resultado usando a expansão em série de Fourier e a Equação 25.11.

**EXEMPLO 25.6**

Determine o valor eficaz da onda quadrada vista na Figura 25.13 com  $V_m = 20 \text{ V}$  usando os seis primeiros termos da expansão em série de Fourier, e compare o resultado com o valor rms real de 20 V.

Solução:

$$v = \frac{4}{\pi}(20 \text{ V}) \operatorname{sen} \omega t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\right)(20 \text{ V}) \operatorname{sen} 3 \omega t$$

$$+ \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{5}\right)(20 \text{ V}) \operatorname{sen} 5 \omega t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{7}\right)(20 \text{ V}) \operatorname{sen} 7 \omega t$$

$$+ \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{9}\right)(20 \text{ V}) \operatorname{sen} 9 \omega t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{11}\right)(20 \text{ V}) \operatorname{sen} 11 \omega t$$

$$v = 25,465 \operatorname{sen} \omega t + 8,488 \operatorname{sen} 3 \omega t + 5,093 \operatorname{sen} 5 \omega t +$$

$$+ 3,638 \operatorname{sen} 7 \omega t + 2,829 \operatorname{sen} 9 \omega t + 2,315 \operatorname{sen} 11 \omega t$$

Para a Equação 25.11:

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{V_{m_1}^2 + V_{m_2}^2 + V_{m_3}^2 + V_{m_4}^2 + V_{m_5}^2 + V_{m_6}^2}{2}}$$

$$= \sqrt{(0 \text{ V})^2 + \frac{(25,465 \text{ V})^2 + (8,488 \text{ V})^2 + (5,093 \text{ V})^2 + (3,638 \text{ V})^2 + (2,829 \text{ V})^2 + (2,315 \text{ V})^2}{2}}$$

$$= 19,66 \text{ V}$$

Esse resultado difere em menos de 0,4 V da resposta correta, 20 V. Entretanto, cada termo que for adicionado à série de Fourier tornará o resultado mais próximo de 20 V. Seria necessário somar um número infinito de termos para se obter o valor exato.

**EXEMPLO 25.7**

O sinal de entrada no circuito mostrado na Figura 25.22 é

$$e = 12 + 10 \operatorname{sen} 2t$$

- a) Determine a corrente  $i$  e as tensões  $v_R$  e  $v_C$ .
- b) Calcule os valores rms de  $i$ ,  $v_R$  e  $v_C$ .
- c) Calcule a potência fornecida ao circuito.

Solução:

- a) O circuito original pode ser redesenhado conforme mostra a Figura 25.23. Aplique o teorema da superposição:
  1. Para a resposta do circuito à fonte contínua de 12 V,  $I = 0$ , pois o capacitor se comporta como um circuito aberto para tensões contínuas quando  $v_C$  alcança seu valor final (regime estacionário). Portanto,

$$V_R = IR = 0 \text{ V} \quad \text{e} \quad V_C = 12 \text{ V}$$

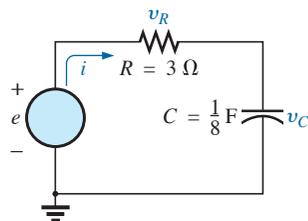


Figura 25.22 Exemplo 25.7.

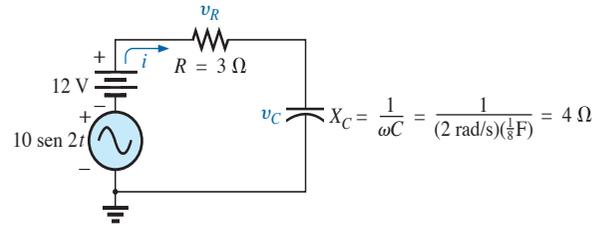


Figura 25.23 Circuito mostrado na Figura 25.22 com as componentes de Fourier do sinal aplicado.

- 2. Na resposta do circuito à fonte senoidal,

$$Z = 3 \Omega - j 4 \Omega = 5 \Omega \angle -53,13^\circ$$

$$e \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} \text{ V} \angle 0^\circ}{5 \Omega \angle -53,13^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A} \angle +53,13^\circ$$

$$\mathbf{V}_R = (I \angle \theta)(R \angle 0^\circ) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A} \angle +53,13^\circ\right)(3 \Omega \angle 0^\circ)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2}} \text{ V} \angle +53,13^\circ$$

e

$$\mathbf{V}_C = (I \angle \theta)(X_C \angle -90^\circ) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A} \angle +53,13^\circ\right)$$

$$(4 \Omega \angle -90^\circ) = \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ V} \angle -36,87^\circ$$

No domínio do tempo,

$$i = 0 + 2 \operatorname{sen}(2t + 53,13^\circ)$$

Observe que, embora exista o termo da componente contínua na expressão da tensão de entrada, esse termo na expansão da corrente no circuito é nulo:

$$v_R = 0 + 6 \operatorname{sen}(2t + 53,13^\circ)$$

$$v_C = 12 + 8 \operatorname{sen}(2t - 36,87^\circ)$$

$$b) \text{ Equação 25.14: } I_{\text{rms}} = \sqrt{(0)^2 + \frac{(2 \text{ A})^2}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \text{ A} = 1,414 \text{ A}$$

$$\text{Equação 25.12: } V_{R_{\text{rms}}} = \sqrt{(0)^2 + \frac{(6 \text{ V})^2}{2}}$$

$$= \sqrt{18} \text{ V} = 4,243 \text{ V}$$

$$\text{Equação 25.12: } V_{C_{\text{rms}}} = \sqrt{(12 \text{ V})^2 + \frac{(8 \text{ V})^2}{2}}$$

$$= \sqrt{176} \text{ V} = 13,267 \text{ V}$$

$$c) P = I_{\text{rms}}^2 R = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A}\right)^2 (3 \Omega) = 6 \text{ W}$$

**EXEMPLO 25.8**

Determine a resposta do circuito mostrado na Figura 25.24 à entrada mostrada.

$$e = 0,318E_m + 0,500E_m \text{ sen } \omega t - 0,212E_m \text{ cos } 2\omega t - 0,0424E_m \text{ cos } 4\omega t + \dots$$

Solução:

Para fins de análise, considere que apenas os três primeiros termos da expansão em série de Fourier sejam usados para representar o sinal  $e$ . Convertendo os termos em cosseno em termos em seno e substituindo  $E_m$  por seu valor, obtemos

$$e = 63,60 + 100,0 \text{ sen } \omega t - 42,40 \text{ sen } (2\omega t + 90^\circ)$$

Usando a notação fasorial, o circuito original pode ser substituído pelo circuito mostrado na Figura 25.25.

**Aplicação do princípio da superposição.** Para o termo da componente contínua ( $E_0 = 63,6 \text{ V}$ ):

$$\begin{aligned} X_L &= 0 \quad (\text{curto para cc}) \\ Z_T &= R \angle 0^\circ = 6 \Omega \angle 0^\circ \\ I_0 &= \frac{E_0}{R} = \frac{63,6 \text{ V}}{6 \Omega} = 10,60 \text{ A} \\ V_{R_0} &= I_0 R = E_0 = 63,60 \text{ V} \\ V_{L_0} &= 0 \end{aligned}$$

A potência média é

$$P_0 = I_0^2 R = (10,60 \text{ A})^2 (6 \Omega) = 674,2 \text{ W}$$

Para o termo fundamental ( $E_1 = 70,71 \text{ V} \angle 0^\circ$ ,  $\omega = 377$ ):

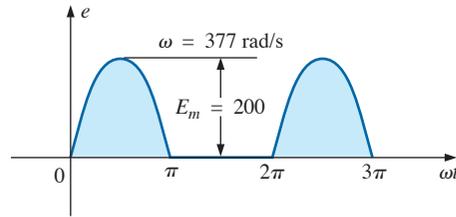
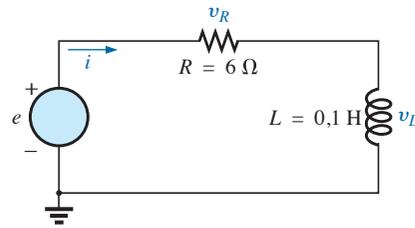
$$\begin{aligned} X_{L_1} &= \omega L = (377 \text{ rad/s})(0,1 \text{ H}) = 37,7 \Omega \\ Z_{T_1} &= 6 \Omega + j 37,7 \Omega = 38,17 \Omega \angle 80,96^\circ \\ I_1 &= \frac{E_1}{Z_{T_1}} = \frac{70,71 \text{ V} \angle 0^\circ}{38,17 \Omega \angle 80,96^\circ} = 1,85 \text{ A} \angle -80,96^\circ \\ V_{R_1} &= (I_1 \angle \theta)(R \angle 0^\circ) = (1,85 \text{ A} \angle -80,96^\circ)(6 \Omega \angle 0^\circ) \\ &= 11,10 \text{ V} \angle -80,96^\circ \\ V_{L_1} &= (I_1 \angle \theta)(X_{L_1} \angle 90^\circ) = (1,85 \text{ A} \angle -80,96^\circ) \\ &\quad (37,7 \Omega \angle 90^\circ) = 69,75 \text{ V} \angle 9,04^\circ \end{aligned}$$

A potência média é

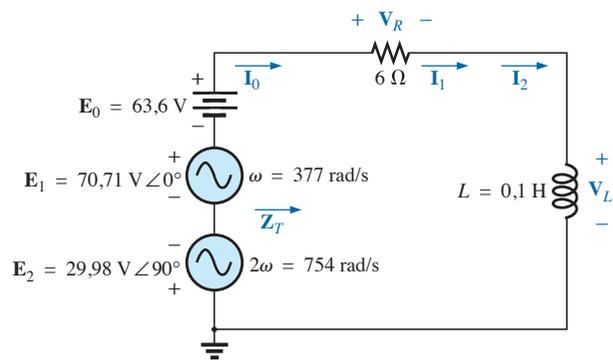
$$P_1 = I_1^2 R = (1,85 \text{ A})^2 (6 \Omega) = 20,54 \text{ W}$$

Para o segundo harmônico ( $E_2 = 29,98 \text{ V} \angle -90^\circ$ ,  $\omega = 754$ ): o ângulo de fase de  $E_2$  foi mudado para  $-90^\circ$  para termos a mesma polaridade que as tensões de entrada  $E_0$  e  $E_1$ . Temos

$$\begin{aligned} X_{L_2} &= \omega L = (754 \text{ rad/s})(0,1 \text{ H}) = 75,4 \Omega \\ Z_{T_2} &= 6 \Omega + j 75,4 \Omega = 75,64 \Omega \angle 85,45^\circ \\ I_2 &= \frac{E_2}{Z_{T_2}} = \frac{29,98 \text{ V} \angle -90^\circ}{75,64 \Omega \angle 85,45^\circ} = 0,396 \text{ A} \angle -174,45^\circ \\ V_{R_2} &= (I_2 \angle \theta)(R \angle 0^\circ) = (0,396 \text{ A} \angle -174,45^\circ)(6 \Omega \angle 0^\circ) \\ &= 2,38 \text{ V} \angle -174,45^\circ \\ V_{L_2} &= (I_2 \angle \theta)(X_{L_2} \angle 90^\circ) = (0,396 \text{ A} \angle -174,45^\circ) \\ &\quad (75,4 \Omega \angle 90^\circ) = 29,9 \text{ V} \angle -84,45^\circ \end{aligned}$$



**Figura 25.24** Exemplo 25.8



**Figura 25.25** Circuito da Figura 25.24 com as componentes de Fourier do sinal aplicado.

A potência média é

$$P_2 = I_2^2 R = (0,396 \text{ A})^2 (6 \Omega) = 0,941 \text{ W}$$

A expansão em série de Fourier da corrente  $i$  é

$$i = 10,6 + \sqrt{2}(1,85) \text{ sen } (377t - 80,96^\circ) + \sqrt{2}(0,396) \text{ sen } (754t - 174,45^\circ)$$

e

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{(10,6 \text{ A})^2 + (1,85 \text{ A})^2 + (0,396 \text{ A})^2} = 10,77 \text{ A}$$

A expansão em série de Fourier para  $v_R$  é

$$v_R = 63,6 + \sqrt{2}(11,10) \text{ sen } (377t - 80,96^\circ) + \sqrt{2}(2,38) \text{ sen } (754t - 174,45^\circ)$$

e

$$V_{R_{\text{rms}}} = \sqrt{(63,6 \text{ V})^2 + (11,10 \text{ V})^2 + (2,38 \text{ V})^2} = 64,61 \text{ V}$$

A expansão em série de Fourier para  $v_L$  é

$$v_L = \sqrt{2}(69,75) \text{ sen}(377t + 9,04^\circ) + \sqrt{2}(29,93) \text{ sen}(754t - 84,45^\circ)$$

e  $V_{L_{\text{rms}}} = \sqrt{(69,75 \text{ V})^2 + (29,93 \text{ V})^2} = 75,90 \text{ V}$

A potência média total é

$$P_T = I_{\text{rms}}^2 R = (10,77 \text{ A})^2 (6 \Omega) = 695,96 \text{ W} = P_0 + P_1 + P_2$$

### 25.4 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FORMAS DE ONDA NÃO SENOIDAIS

A expansão em série de Fourier da forma de onda resultante da adição ou da subtração de duas formas de onda não senoidais pode ser determinada usando-se as regras da álgebra fasorial nos termos com a mesma frequência que são considerados separadamente.

Por exemplo, a soma das duas formas de onda não senoidais a seguir é determinada usando-se este método:

$$v_1 = 30 + 20 \text{ sen } 20t + \dots + 5 \text{ sen}(60t + 30^\circ)$$

$$v_2 = 60 + 30 \text{ sen } 20t + 20 \text{ sen } 40t + 10 \text{ cos } 60t$$

1. Termos das componentes contínuas:

$$V_{T_0} = 30 \text{ V} + 60 \text{ V} = 90 \text{ V}$$

2.  $\omega = 20$ :

$$V_{T_1(\text{máx})} = 30 \text{ V} + 20 \text{ V} = 50 \text{ V}$$

e  $v_{T_1} = 50 \text{ sen } 20t$

3.  $\omega = 40$ :

$$v_{T_2} = 20 \text{ sen } 40t$$

4.  $\omega = 60$ :

$$5 \text{ sen}(60t + 30^\circ) = (0,707)(5) \text{ V } \angle 30^\circ = 3,54 \text{ V } \angle 30^\circ$$

$$10 \text{ cos } 60t = 10 \text{ sen}(60t + 90^\circ) \Rightarrow (0,707)(10) \text{ V } \angle 90^\circ = 7,07 \text{ V } \angle 90^\circ$$

$$V_{T_3} = 3,54 \text{ V } \angle 30^\circ + 7,07 \text{ V } \angle 90^\circ = 3,07 \text{ V} + j 1,77 \text{ V} + j 7,07 \text{ V} = 3,07 \text{ V} + j 8,84 \text{ V}$$

$$V_{T_3} = 9,36 \text{ V } \angle 70,85^\circ$$

e  $v_{T_3} = 13,24 \text{ sen}(60t + 70,85^\circ)$

com

$$v_T = v_1 + v_2 = 90 + 50 \text{ sen } 20t + 20 \text{ sen } 40t + 13,24 \text{ sen}(60t + 70,85^\circ)$$

### 25.5 ANÁLISE COMPUTACIONAL

#### PSpice

**Séries de Fourier.** Essa análise computacional começa com a verificação das formas de onda mostradas na Figura 25.15, demonstrando que somente quatro termos da série de Fourier podem gerar uma forma de onda que tenha diversas características de uma onda quadrada. Uma onda desse tipo, com valor de pico de 10 V e frequência de 1 kHz, apresenta, por meio do uso da Equação 25.9 (e sabendo-se que  $\omega = 2\pi f = 6283,19 \text{ rad/s}$ ), a seguinte série de Fourier:

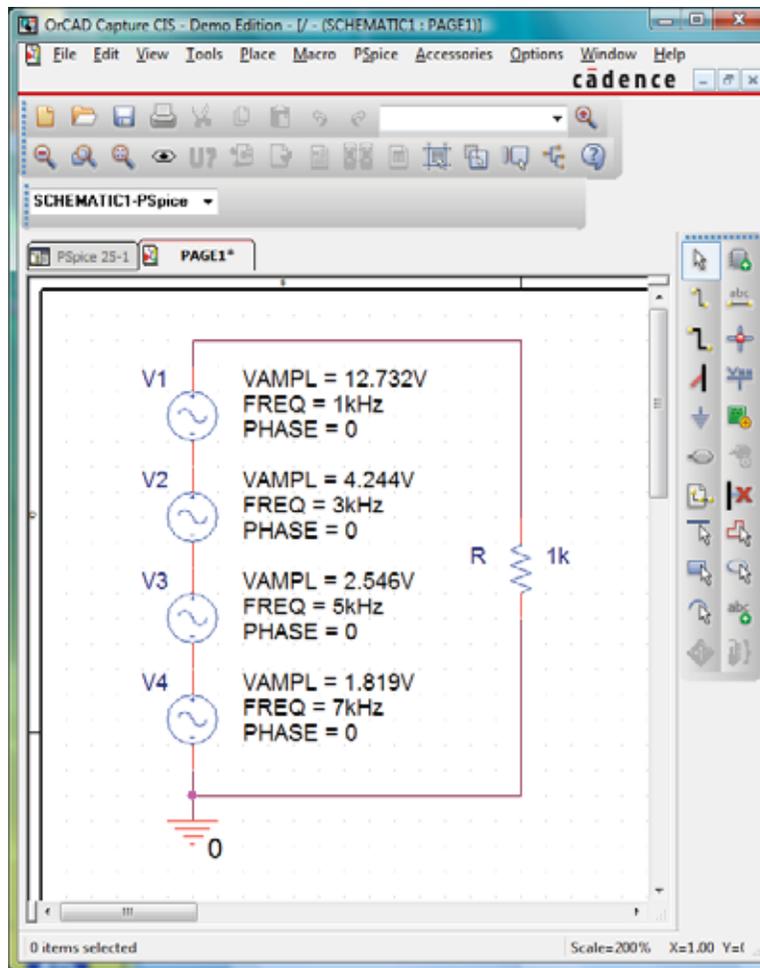
$$v = \frac{4}{\pi} (10 \text{ V}) \left( \text{sen } \omega t + \frac{1}{3} \text{ sen } 3\omega t + \frac{1}{5} \text{ sen } 5\omega t + \frac{1}{7} \text{ sen } 7\omega t \right)$$

$$= 12,732 \text{ sen } \omega t + 4,244 \text{ sen } 3\omega t + 2,546 \text{ sen } 5\omega t + 1,819 \text{ sen } 7\omega t$$

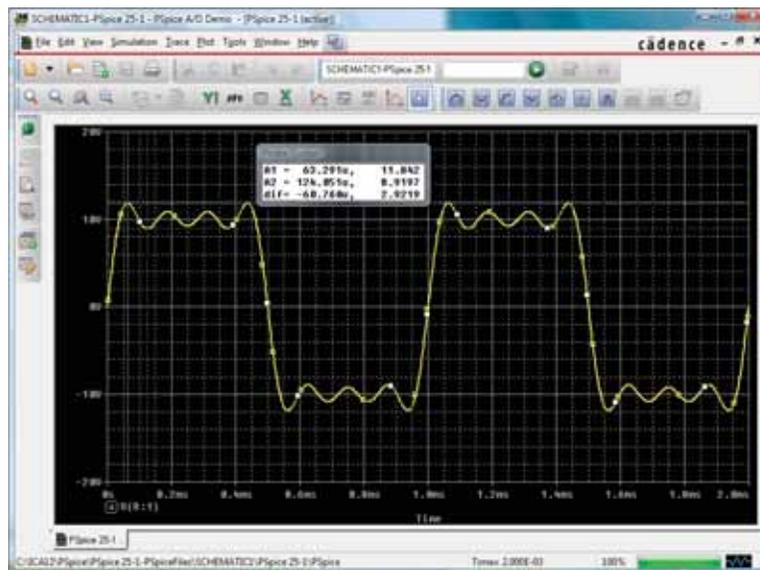
Cada termo da série de Fourier é tratado como uma fonte alternada independente, como mostra a Figura 25.26, com seu valor de pico e a frequência aplicada. A resultante da soma das fontes de tensão aparece no resistor  $R$ , sendo a forma de onda dessa tensão mostrada na Figura 25.27.

Todas as fontes mostradas na Figura 25.26 são do tipo **VSIN**, e como desejamos mostrar o resultado em função do tempo, escolhemos **Time Domain(Transient)** em **Simulation Settings**. Para cada uma das fontes, a caixa de diálogo **Property Editor** foi aberta, e os parâmetros **AC**, **FREQ**, **PHASE**, **VAMPL** e **VOFF** (em 0 V) foram ajustados, embora apenas os parâmetros **VAMPL**, **FREQ** e **PHASE** tenham sido mostrados na Figura 25.26 por questão de limitação de espaço. As outras grandezas foram configuradas em **Display** para que não fossem mostradas (**Do Not Display**).

O parâmetro **Run to time** foi ajustado em 2 ms, de modo que dois ciclos da forma de onda da componente fundamental de 1 kHz pudessem ser mostrados. O parâmetro **Start saving data after** foi mantido no valor default de 0 s e **Maximum step size** foi ajustado em 1 ms, embora  $2 \text{ ms}/1.000 = 2 \text{ ms}$ , pois queremos ter mais pontos no gráfico para a forma de onda complexa. Uma vez que a janela **SCHEMATIC1** tenha aparecido, a sequência **Trace-Add Trace-V(R:1)-OK** resulta na forma de onda mostrada na Figura 25.27. A reta horizontal em 0 V é feita com traço mais grosso, clicando-se com o botão direito do mouse na linha, selecionando-se **Properties** e escolhendo-se a cor verde (*green*) e uma linha mais grossa. Clique em **OK**, e a linha grossa, mostrada na Figura 25.27, aparecerá, fazendo com que o posicionamento da linha de 0 V fique mais nítido.



**Figura 25.26** Uso do PSpice para aplicar quatro termos da expansão de Fourier de uma onda quadrada com amplitude de 10 V em um resistor de 1 k $\Omega$ .



**Figura 25.27** Forma de onda resultante sobre o resistor R do circuito da Figura 25.26.

do. Utilizando-se o mesmo procedimento, as propriedades da curva podem ser alteradas para amarelo e com espessura maior, conforme mostra a mesma figura. Usando os cursores, podemos ver que o primeiro pico alcança 11,84 V em 0,063 ms, caindo em seguida para 8,920 V em 0,124 ms. O valor médio da forma de onda é evidentemente +10 V na parte positiva, conforme se pode verificar através da inserção de uma linha horizontal usando-se a sequência **Plot-Label-Line**. Em todos os aspectos, a forma de onda assemelha-se a uma onda quadrada periódica com um valor de pico de 10 V e uma frequência de 1 kHz.

**Componentes da série de Fourier.** O gráfico do espectro de frequência, que revela a amplitude e a frequência de cada componente da série de Fourier, pode ser obtido ao retornarmos à opção **Plot** e selecionarmos **Axis Settings** seguido de **X Axis**, e em seguida **Fourier**

em **Processing Options**. Clique em **OK** e diversos picos aparecerão no lado esquerdo da tela, com um espectro de frequência que se estende de 0 Hz a 600 kHz. Ativando **Plot-Axis Settings** novamente, acionando **Data Range** e selecionando **User Defined**, você pode alterar para a faixa de frequência de 0 Hz a 10 kHz, já que é essa a faixa de interesse para tal forma de onda. Clique em **OK** e o gráfico, mostrado na Figura 25.28, aparecerá com a amplitude e a frequência das componentes do sinal. Usando o cursor esquerdo, podemos encontrar o maior valor de pico — 12,74 V em 1 kHz —, que está muito próximo do valor de pico da fonte **V1** — 12,732 V em 1 kHz. Usando o cursor da direita, podemos movê-lo para a posição correspondente a 3 kHz e encontrar uma amplitude de 4,248 V que está, mais uma vez, bem próxima do valor de pico da fonte **V2**, que é 4,244 V.

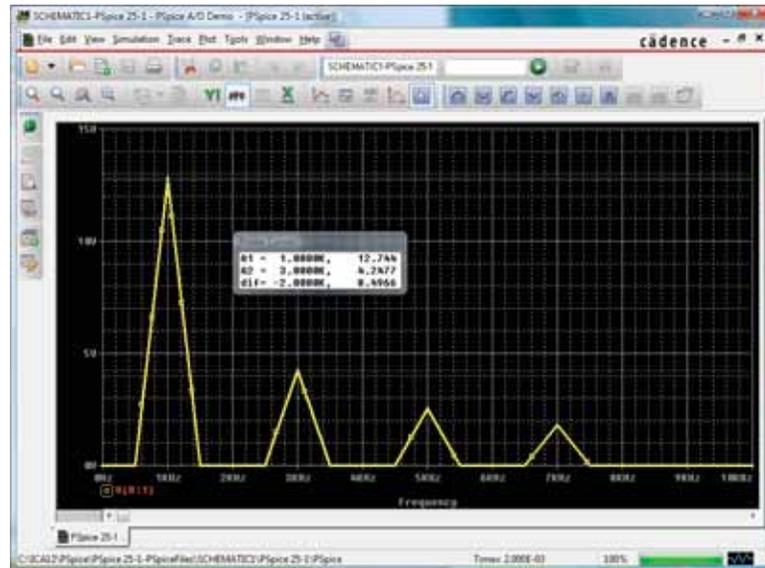


Figura 25.28 Componentes de Fourier da forma de onda da Figura 25.27.

## PROBLEMAS

### Seção 25.2 Séries de Fourier

- Para as formas de onda vistas na Figura 25.29, determine se os seguintes termos estão presentes na expansão em série de Fourier:
  - componente contínua
  - termos em cosseno
  - termos em seno
  - harmônicos pares
  - harmônicos ímpares
- Se a série de Fourier para a forma de onda vista na Figura 25.30(a) é

$$i = \frac{2I_m}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t + \dots \right)$$

determine a representação em série de Fourier das quatro formas de onda mostradas em (b) a (d).

- Esboce os gráficos das formas de onda não senoidais a seguir considerando que  $\alpha = \omega t$  seja a abscissa.
  - $v = -4 + 2 \sin \alpha$
  - $v = (\sin \alpha)^2$
  - $i = 2 - 2 \cos \alpha$
- Esboce os gráficos das formas de onda não senoidais a seguir considerando que  $\alpha$  seja a abscissa.
  - $i = 3 \sin \alpha - 6 \sin 2\alpha$
  - $v = 2 \cos 2\alpha + \sin \alpha$
- Esboce os gráficos das formas de onda não senoidais a seguir considerando que  $\omega t$  seja a abscissa.
  - $i = 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega t$
  - $i = 50 \sin \alpha - 25 \sin 3\alpha$
  - $i = 4 + 3 \sin \omega t + 2 \sin 2\omega t - 1 \sin 3\omega t$

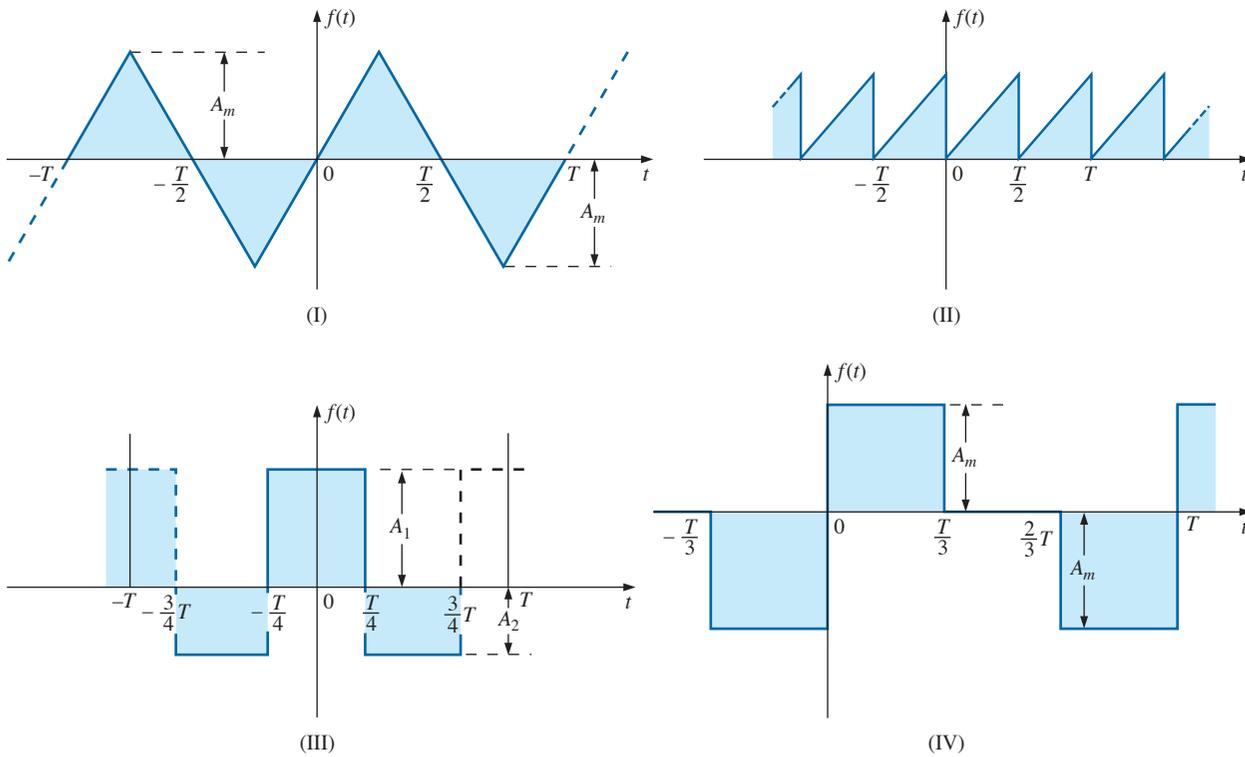


Figura 25.29 Problema 1.

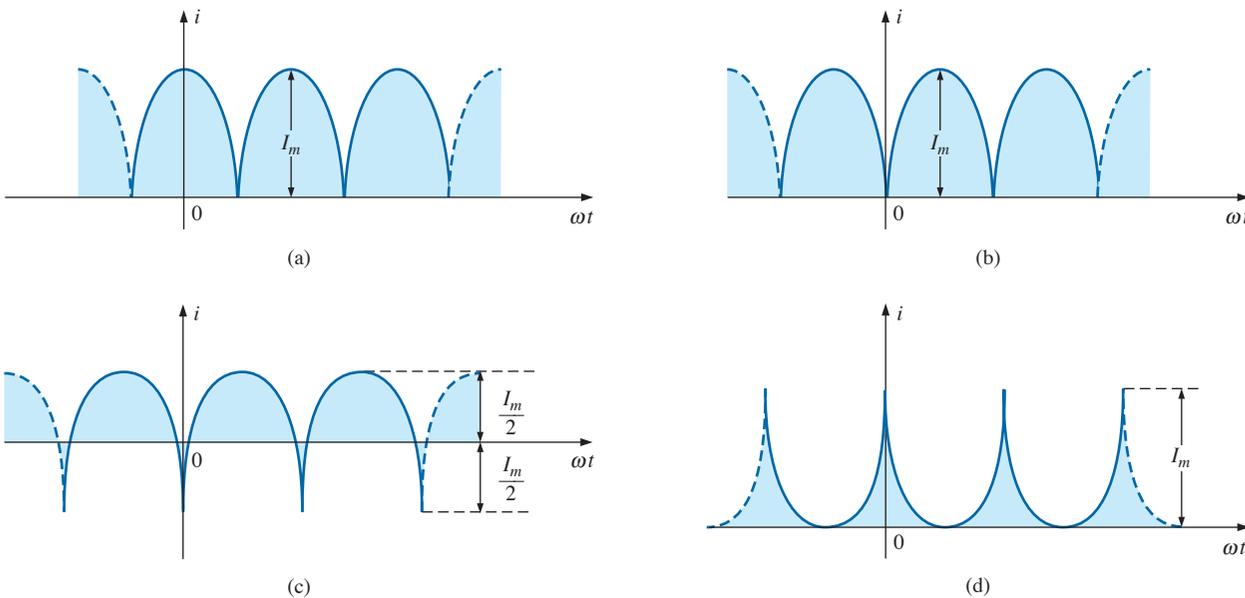


Figura 25.30 Problema 2.

**Seção 25.3** Resposta de um circuito a um sinal não senoidal

6. Calcule os valores médio e eficaz das seguintes formas de onda não senoidais:
- $v = 100 + 50 \text{ sen } \omega t + 25 \text{ sen } 2\omega t$
  - $i = 3 + 2 \text{ sen}(\omega t - 53^\circ) + 0,8 \text{ sen}(2\omega t - 70^\circ)$

- Determine o valor eficaz (rms) das seguintes formas de onda não senoidais:
  - $v = 20 \text{ sen } \omega t + 15 \text{ sen } 2\omega t - 10 \text{ sen } 3\omega t$
  - $i = 6 \text{ sen}(\omega t + 20^\circ) + 2 \text{ sen}(2\omega t + 30^\circ) - 1 \text{ sen}(3\omega t + 60^\circ)$
- Calcule a potência média total em um circuito no qual a tensão e a corrente são as indicadas no Problema 6.

9. Calcule a potência média total em um circuito no qual a tensão e a corrente são as indicadas no Problema 7.  
 10. A representação em série de Fourier da tensão na entrada do circuito visto na Figura 25.31 é

$$e = 18 + 30 \text{ sen } 400t$$

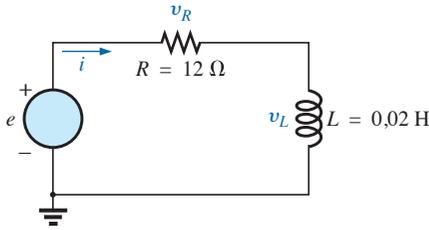


Figura 25.31 Problemas 10, 11 e 12.

- Obtenha a expressão não senoidal da corrente  $i$ .
- Calcule o valor rms da corrente.
- Obtenha uma expressão para a tensão no resistor.
- Calcule o valor rms da tensão no resistor.
- Obtenha a expressão da tensão no elemento reativo.
- Calcule o valor rms da tensão no elemento reativo.
- Calcule a potência média fornecida ao resistor.

11. Repita o Problema 10 para

$$e = 24 + 30 \text{ sen } 400t + 10 \text{ sen } 800t$$

12. Repita o Problema 10 para a seguinte tensão de entrada:

$$e = -60 + 20 \text{ sen } 300t - 10 \text{ sen } 600t$$

13. Repita o Problema 10 para o circuito visto na Figura 25.32.

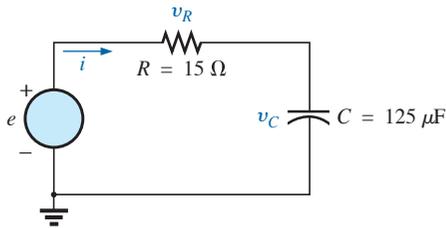


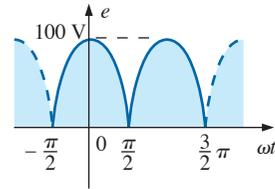
Figura 25.32 Problema 13.

- \*14. A tensão de entrada, mostrada na Figura 25.33(a), que é aplicada ao circuito, mostrado na Figura 25.33(b), é um sinal senoidal retificado de onda completa que pode ser representado pela seguinte expansão em série de Fourier:

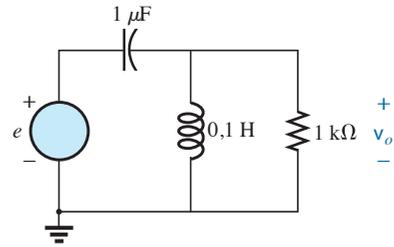
$$e = \frac{(2)(100 \text{ V})}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{53} \cos 6\omega t + \dots \right)$$

onde  $\omega = 377$ .

- Determine a expressão para a tensão  $v_o$ , usando apenas os três primeiros termos da série de Fourier.
  - Calcule o valor rms de  $v_o$ .
  - Obtenha a potência média fornecida ao resistor de 1 kΩ.
- \*15. Determine a expressão em série de Fourier da tensão  $v_o$  vista na Figura 25.34.

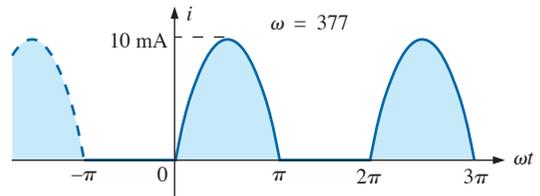


(a)

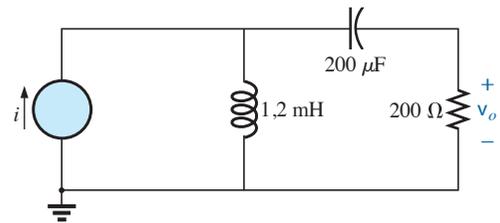


(b)

Figura 25.33 Problema 14.



(a)



(b)

Figura 25.34 Problema 15.

### Seção 25.4 Adição e subtração de formas de onda não senoidais

16. Execute as operações indicadas a seguir para formas de onda não senoidais:
- $[60 + 70 \text{ sen } \omega t + 20 \text{ sen}(2\omega t + 90^\circ) + 10 \text{ sen}(3\omega t + 60^\circ)] + [20 + 30 \text{ sen } \omega t - 20 \text{ cos } 2\omega t + 5 \text{ cos } 3\omega t]$
  - $[20 + 60 \text{ sen } \alpha + 10 \text{ sen}(2\alpha - 180^\circ) + 5 \text{ cos}(3\alpha + 90^\circ)] - [5 - 10 \text{ sen } \alpha + 4 \text{ sen}(3\alpha + 30^\circ)]$
17. Determine expressão não senoidal para a corrente  $i_s$  no circuito visto na Figura 25.35.
- $$i_2 = 10 + 30 \text{ sen } 20t - 0,5 \text{ sen}(40t + 90^\circ)$$
- $$i_1 = 20 + 4 \text{ sen}(20t + 90^\circ) + 0,5 \text{ sen}(40t + 30^\circ)$$

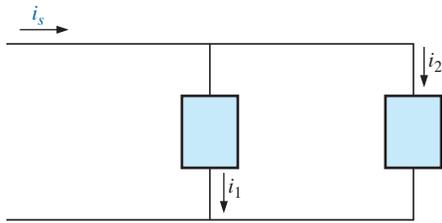


Figura 25.35 Problema 17.

18. Determine a expressão não senoidal para a tensão  $e$  no circuito visto na Figura 25.36.

$$v_1 = 20 - 200 \sin 600t + 100 \cos 1.200t + 75 \sin 1.800t$$

$$v_2 = -10 + 150 \sin(600t + 30^\circ) + 50 \sin(1.800t + 60^\circ)$$

Seção 25.5 Análise computacional

PSpice

19. Plote a forma de onda mostrada na Figura 25.11 para visualizar dois ou três ciclos. Em seguida, obtenha as componentes de Fourier e compare-as ao sinal aplicado.

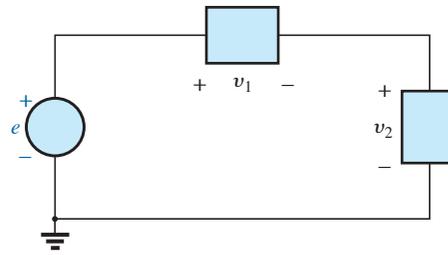


Figura 25.36 Problema 18.

20. Plote a forma de onda de uma tensão senoidal retificada de meia-onda com um valor de pico de 20 V usando a Equação 25.10. Use os termos da componente contínua, da fundamental e quatro harmônicos. Compare a forma de onda obtida com a forma de onda de um retificador de meia-onda ideal.

21. Demonstre graficamente o efeito da adição de mais dois termos à forma de onda mostrada na Figura 25.27 e gere o espectro de Fourier.

GLOSSÁRIO

**Componente fundamental:** Componente de menor frequência na expansão de uma função periódica em série de Fourier.

**Forma de onda não senoidal:** Qualquer forma de onda que se diferencie da função senoidal fundamental.

**Harmônicos ímpares:** Termos de uma expansão em série de Fourier cujas frequências são múltiplos ímpares da frequência da componente fundamental.

**Harmônicos pares:** Termos de uma expansão em série de Fourier cujas frequências são múltiplos pares da frequência da componente fundamental.

**Harmônicos:** Termos de uma expansão em série de Fourier cujas frequências são múltiplos inteiros da frequência da componente fundamental.

**Série de Fourier:** Série de termos desenvolvida em 1822 pelo Barão Jean Fourier, que pode ser utilizada para representar qualquer função não senoidal.

**Simetria axial (função par):** Função senoidal ou não senoidal que possui simetria em relação ao eixo vertical.

**Simetria central (função ímpar):** Simetria de uma função que satisfaz a relação  $f(a) = -f(a)$ .

**Simetria especular (ou de meia-onda):** Simetria de uma função que satisfaz a relação

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$