

Ressonância



Objetivos

- Familiarizar-se com a resposta em frequência de um circuito ressonante em série e aprender a calcular as frequências de ressonância e de corte.
- Calcular os níveis de fator de qualidade, de largura de banda e de potência de um circuito sintonizado em níveis de frequência importantes.
- Familiarizar-se com a resposta em frequência de um circuito ressonante paralelo e aprender a calcular as frequências de ressonância e de corte.
- Entender o impacto do fator de qualidade na resposta em frequência de um circuito ressonante em série ou em paralelo.
- Começar a entender a diferença entre definir a ressonância paralela na frequência em que a impedância de entrada é máxima e onde o circuito possui um fator de potência unitário.

20.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos o circuito ressonante (ou sintonizado), que é um circuito muito importante por ser fundamental para o funcionamento de uma grande variedade de sistemas elétricos e eletrônicos utilizados hoje em dia. O circuito ressonante é uma combinação de elementos R , L e C que possui uma resposta em frequência característica semelhante à que aparece na Figura 20.1. Observe nessa figura que a resposta é máxima para a frequência f_r , diminuindo tanto para a direita quanto para a esquerda dessa frequência. Em outras palavras, para uma determinada faixa de frequência, a resposta tem um valor igual ou próximo do valor máximo. As frequências distantes, à direita ou à esquerda, têm valores de tensão ou corrente muito pequenos, e, para fins práticos, apresentam uma pequena influência na resposta do sistema. O receptor de rádio ou televisão tem uma curva de resposta para cada emissora, como a que vemos na Figura 20.1. Quando o receptor é ajustado (ou sintonizado) para uma determinada emissora, ele é ajustado para uma frequência próxima à f_r vista na Figura 20.1. Estações que transmitem em frequências afastadas dessa frequência não são recebidas

com potência significativa para afetar o programa de interesse. O processo de sintonia (ajuste do seletor para f_r) que acabamos de descrever é a razão da terminologia *circuito sintonizado*. Quando a resposta está próxima do máximo, diz-se que o circuito está em um estado de **ressonância**.

O conceito de ressonância não se limita a sistemas elétricos ou eletrônicos. Se forem aplicados impulsos a um sistema mecânico com uma frequência apropriada, o sistema entrará em um estado de ressonância, sofren-

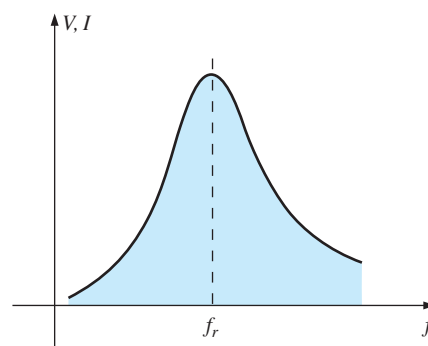


Figura 20.1 Curva de ressonância.

do oscilações de grande amplitude. A frequência dessas oscilações é denominada *frequência natural* do sistema. Um exemplo clássico desse efeito é o que aconteceu com a ponte Tacoma Narrows, construída em 1940 sobre o estreito Puget, no Estado de Washington, Estados Unidos. Quatro meses após a inauguração da ponte, que tinha um vão livre de 853 metros, um vento intermitente de 67 km/h a fez oscilar na sua frequência natural. A amplitude das oscilações foi aumentando, a ponto de a ponte se romper e cair na água. A ponte foi substituída por outra nova em 1950.

Um circuito elétrico ressonante *precisa* ter tanto indutância quanto capacitância. Além disso, uma resistência sempre está presente, seja porque não existem capacitores e indutores ideais, seja para controlar a forma da curva de ressonância. Quando a ressonância ocorre por causa da aplicação da frequência apropriada (f_r), a energia armazenada em um elemento reativo é igual à fornecida por outro elemento reativo do sistema. Em outras palavras, a energia oscila entre um elemento reativo e outro. Portanto, uma vez que um sistema ideal (C e L puros) atinge um estado de ressonância, ele não necessita mais de potência reativa, pois é autossustentado. Em um circuito real, existe uma resistência presente nos elementos reativos que produz um eventual ‘amortecimento’ das oscilações entre os elementos reativos.

Há dois tipos de circuitos ressonantes: em *série* e em *paralelo*. Ambos serão discutidos detalhadamente neste capítulo.

RESSONÂNCIA EM SÉRIE

20.2 CIRCUITO RESSONANTE EM SÉRIE

Um circuito ressonante (em série ou em paralelo) tem de ter um elemento indutivo e outro capacitivo. Um elemento resistivo sempre está presente como a resistência interna da fonte, R_s , a resistência interna do indutor, R_l , e qualquer outra resistência acrescentada ao circuito para controlar a forma da curva de resposta ($R_{projeto}$). A configuração básica do circuito ressonante em série

aparece na Figura 20.2(a) com os elementos resistivos agora mencionados. O circuito de aparência ‘mais limpa’ mostrado na Figura 20.2(b) é o resultado da substituição da combinação em série dos elementos resistivos por uma única resistência equivalente. Ou seja,

$$R = R_s + R_l + R_d \tag{20.1}$$

A impedância total desse circuito para qualquer frequência é dada por:

$$Z_T = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C)$$

As condições de ressonância descritas na introdução ocorrem quando:

$$X_L = X_C \tag{20.2}$$

o que remove a componente reativa da equação da impedância total. A impedância total na ressonância é simplesmente:

$$Z_{T_s} = R \tag{20.3}$$

o que constitui o menor valor de Z_T para qualquer frequência. O índice s será usado para indicar a condição de ressonância em série.

A frequência de ressonância pode ser determinada em termos da indutância e da capacitância do circuito a partir da equação de definição da ressonância (veja a Equação 20.2):

$$X_L = X_C$$

Fazendo a substituição, temos:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

e
$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{20.4}$$

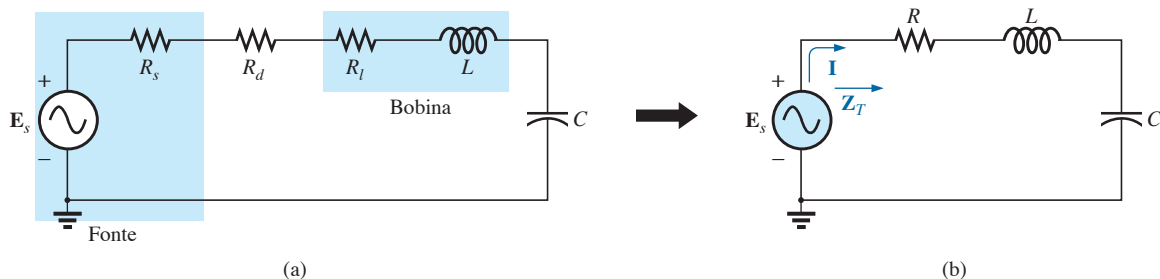


Figura 20.2 Circuito ressonante em série.

ou
$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \begin{matrix} f = \text{hertz (Hz)} \\ L = \text{henries (H)} \\ C = \text{farads (F)} \end{matrix} \quad (20.5)$$

A corrente no circuito na condição de ressonância é

$$\mathbf{I} = \frac{E \angle 0^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{E}{R} \angle 0^\circ$$

que é a corrente máxima no circuito da Figura 20.2 para uma tensão aplicada E , já que o valor de Z_T é mínimo. Observe também que a tensão de entrada e a corrente estão em fase na ressonância.

Como as correntes no indutor e no capacitor são iguais, as tensões em cada um são iguais em módulo, mas estão defasadas 180° na ressonância.

$$\left. \begin{aligned} V_L &= (I \angle 0^\circ)(X_L \angle 90^\circ) = IX_L \angle 90^\circ \\ V_C &= (I \angle 0^\circ)(X_C \angle -90^\circ) = IX_C \angle -90^\circ \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \text{Defasadas} \\ 180^\circ \end{matrix}$$

e como $X_L = X_C$, os módulos de V_L e V_C são iguais na ressonância, ou seja:

$$V_{L_s} = V_{C_s} \quad (20.6)$$

A Figura 20.3, um diagrama fasorial das tensões e da corrente, mostra claramente que a tensão no resistor na ressonância é igual à tensão de entrada e que E , I e V_R estão em fase na ressonância.

A potência média dissipada pelo resistor na ressonância é igual a I^2R e as potências reativas armazenadas no capacitor e no indutor são I^2X_C e I^2X_L , respectivamente.

O triângulo de potências na ressonância (veja a Figura 20.4) mostra que a potência aparente total é igual à potência média dissipada pelo resistor, pois $Q_L = Q_C$. O fator de potência do circuito na ressonância é:

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S}$$

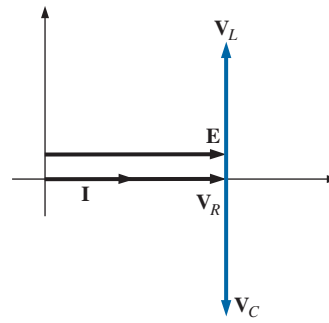


Figura 20.3 Diagrama fasorial para o circuito ressonante em série na ressonância.

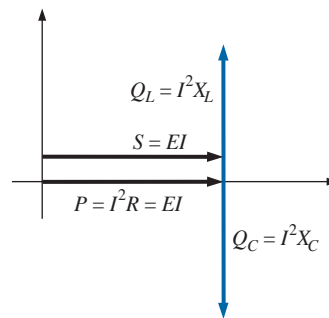


Figura 20.4 Triângulo de potência para o circuito ressonante em série na ressonância.

e
$$F_{p_s} = 1 \quad (20.7)$$

Plotando as curvas de potência de cada elemento no mesmo gráfico (veja a Figura 20.5), notamos que, embora a potência reativa total em qualquer instante seja nula (observe que $t = t'$), a energia ainda está sendo armazenada e liberada pelo indutor e pelo capacitor na ressonância.

Em um exame mais minucioso, vemos que a energia armazenada pelo indutor de 0 a t_1 é igual à energia liberada pelo capacitor no mesmo intervalo. O contrário ocorre no intervalo de t_1 a t_2 , e assim por diante. Portanto, a potência

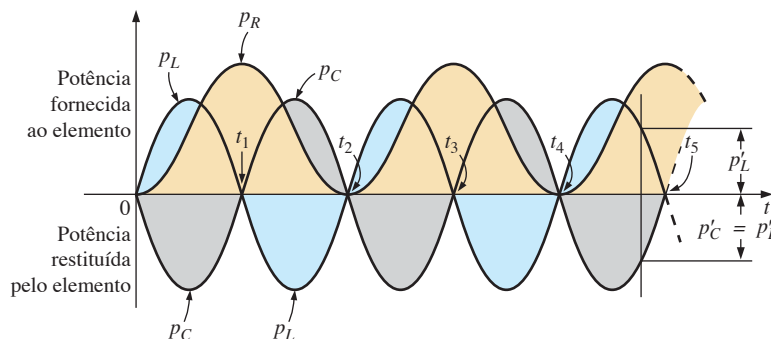


Figura 20.5 Curvas de potência na ressonância para o circuito ressonante em série.

aparente total é igual à potência média, embora o indutor e o capacitor estejam armazenando e liberando energia. Essa situação ocorre apenas na ressonância. Qualquer pequena alteração na frequência introduz uma componente reativa no triângulo de potências, fazendo com que a potência aparente do sistema seja maior que a potência média e a situação de ressonância não exista mais.

20.3 FATOR DE QUALIDADE (Q)

O **fator de qualidade** Q de um circuito ressonante em série é definido como a razão entre a potência reativa do indutor ou do capacitor e a potência média do resistor na frequência de ressonância; ou seja,

$$Q_s = \frac{\text{potência reativa}}{\text{potência média}} \quad (20.8)$$

O fator de qualidade também é uma indicação da quantidade de energia que é armazenada (transferida continuamente de um elemento reativo para outro) em comparação com a energia dissipada. Quanto menor o valor da potência dissipada para um mesmo valor de potência reativa, maior o fator Q_s e mais concentrada e intensa a região de ressonância.

Considerando uma reatância indutiva e uma situação de ressonância, a substituição da potência reativa e da potência média por seus valores na Equação 20.8 nos dá:

$$Q_s = \frac{I^2 X_L}{I^2 R}$$

e

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_s L}{R} \quad (20.9)$$

Se a resistência R for somente a resistência do indutor (R_l), poderemos nos referir ao Q_s do indutor, onde:

$$Q_s = Q_{\text{indutor}} = Q_l = \frac{X_L}{R_l} \quad R = R_l \quad (20.10)$$

Como o fator de qualidade de um indutor é uma informação geralmente fornecida pelo fabricante, muitas vezes ele é representado pelo símbolo Q , sem nenhum índice. Podemos deduzir, a partir da Equação 20.10, que Q_l aumentará linearmente com a frequência, pois $X_L = 2\pi fL$. Ou seja, se a frequência dobrar, Q_l também será multiplicado por 2. Isso se assemelha a uma situação real em baixas e médias frequências, conforme mostra a Figura 20.6 para alguns indutores. Entretanto, infelizmente, à medida que a frequência aumenta, a resistência efetiva da bobina também aumenta, principalmente pelo efeito pelicular, e o Q_l do indutor diminui. Além disso, os

efeitos capacitivos entre as espiras do indutor aumentam, reduzindo ainda mais o valor de Q_l . Por essa razão, Q_l precisa ser especificado para uma determinada frequência ou faixa de frequências. Nas aplicações que envolvem uma larga faixa de frequências, normalmente é fornecido um gráfico de Q_l em função da frequência. O valor máximo de Q_l na maioria dos indutores comerciais é menor que 200, e a maioria tem um Q máximo próximo de 100. Observe na Figura 20.6 que, no caso de indutores do mesmo tipo, o valor de Q_l cai mais rapidamente com a frequência em indutores com valores maiores de indutância.

Se substituirmos

$$\omega_s = 2\pi f_s$$

e então

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

na Equação 20.9, teremos:

$$Q_s = \frac{\omega_s L}{R} = \frac{2\pi f_s L}{R} = \frac{2\pi}{R} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right) L$$

$$= \frac{L}{R} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right) = \left(\frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{LC}} \right) \frac{L}{R\sqrt{LC}}$$

e

$$Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (20.11)$$

o que nos dá Q_s em termos dos parâmetros do circuito.

Nos circuitos ressonantes em série usados em sistema de comunicações, Q_s é geralmente maior do que 1. Aplicando a regra dos divisores de tensão ao circuito mostrado na Figura 20.2, obtemos:

$$V_L = \frac{X_L E}{Z_T} = \frac{X_L E}{R} \quad (\text{na ressonância})$$

e

$$V_{L_s} = Q_s E \quad (20.12)$$

ou

$$V_C = \frac{X_C E}{Z_T} = \frac{X_C E}{R}$$

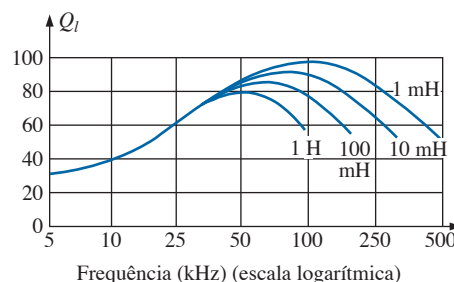


Figura 20.6 Q_l em função da frequência para alguns indutores similares.

e $V_{C_s} = Q_s E$ (20.13)

Como Q_s é normalmente maior que 1, a tensão no capacitor ou no indutor de um circuito ressonante em série pode ser significativamente maior que a tensão de entrada. De fato, em muitos casos, o Q_s é tão grande que o projeto do circuito, assim como sua manipulação (incluindo o isolamento adequado), têm de ser muito bem planejados quanto às tensões no capacitor e no indutor.

No circuito da Figura 20.7, por exemplo, que está em ressonância,

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{480 \Omega}{6 \Omega} = 80$$

e $V_L = V_C = Q_s E = (80)(10 \text{ V}) = \mathbf{800 \text{ V}}$

que é certamente uma tensão com valor considerável.

A frase normalmente usada é que existe um aumento Q na tensão dos componentes reativos em um circuito ressonante em série.

20.4 Z_T EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA

A impedância total do circuito R-L-C em série da Figura 20.2 em qualquer frequência é dada por:

$$\mathbf{Z_T = R + jX_L - jX_C \quad \text{ou} \quad \mathbf{Z_T = R + j(X_L - X_C)}$$

O módulo da impedância Z_T em função da frequência é dado por:

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

A curva da impedância total em função da frequência para o circuito ressonante em série, visto na Figura 20.2, pode ser determinada usando a curva da impedância em função da frequência para cada elemento da equação que acabamos de deduzir, escrita da seguinte forma:

$$Z_T(f) = \sqrt{[R(f)]^2 + [X_L(f) - X_C(f)]^2} \quad (20.14)$$

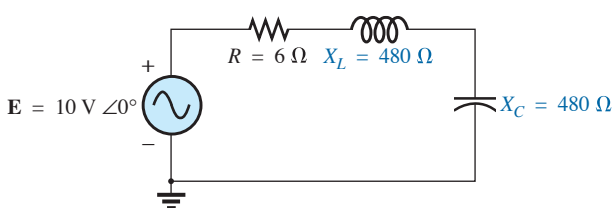


Figura 20.7 Circuito ressonante em série com alto valor de Q .

onde $Z_T(f)$ ‘simboliza’ a impedância total em função da frequência. Para a faixa de frequência de interesse, consideraremos que a resistência R não muda, como no gráfico visto na Figura 20.8. A curva para a indutância, conforme determinada a partir da equação da reatância, é uma linha reta que intercepta a origem com uma inclinação igual à indutância do indutor. A expressão matemática de uma reta genérica no espaço bidimensional é dada por:

$$y = mx + b$$

Assim, para o indutor,

$$X_L = 2\pi fL + 0 = (2\pi L)(f) + 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$y = \qquad \qquad \qquad m \cdot x + b$$

(onde $2\pi L$ é a inclinação), como se pode ver na Figura 20.9.

Para o capacitor,

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad \text{or} \quad X_C f = \frac{1}{2\pi C}$$

que se torna $yx = k$, a equação de uma hipérbole, onde:

$$y(\text{variável}) = X_C$$

$$x(\text{variável}) = f$$

$$k(\text{constante}) = \frac{1}{2\pi C}$$

A curva hiperbólica para $X_C(f)$ é mostrada na Figura 20.10. Observe, em particular, que X_C tem um valor muito

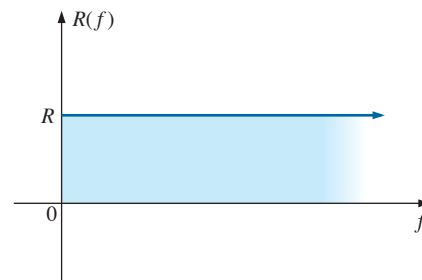


Figura 20.8 Resistência em função da frequência.

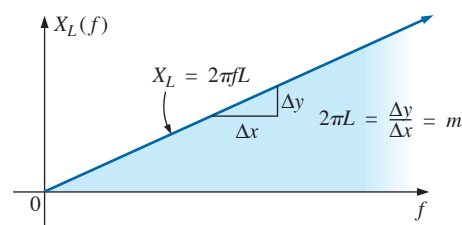


Figura 20.9 Reatância indutiva em função da frequência.

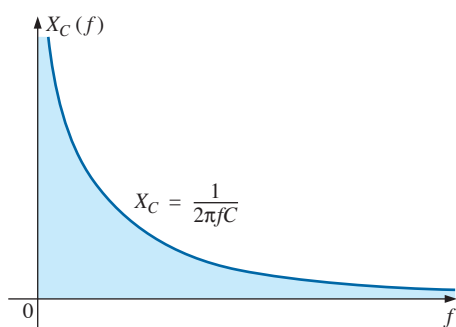


Figura 20.10 Reatância capacitiva em função da frequência.

elevado em baixas frequências e diminui rapidamente à medida que a frequência aumenta.

Se plotarmos as curvas das figuras 20.9 e 20.10 no mesmo gráfico, obteremos a Figura 20.11. A condição de ressonância é agora claramente definida pelo ponto de interseção, onde $X_L = X_C$. Para frequências menores que f_s , também fica bastante claro que o circuito é principalmente capacitivo ($X_C > X_L$). Para frequência acima da condição de ressonância, $X_L > X_C$, o circuito é indutivo.

Aplicando a equação

$$Z_T(f) = \sqrt{[R(f)]^2 + [X_L(f) - X_C(f)]^2}$$

$$= \sqrt{[R(f)]^2 + [X(f)]^2}$$

às curvas da Figura 20.11, onde $X(f) = X_L(f) - X_C(f)$, obtemos a curva para $Z_T(f)$, mostrada na Figura 20.12. A impedância é mínima na frequência de ressonância e é igual à resistência R . Note que a curva não é simétrica em relação à frequência de ressonância (especialmente para valores elevados de Z_T).

O ângulo de fase associado à impedância total é:

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{(X_L - X_C)}{R} \quad (20.15)$$

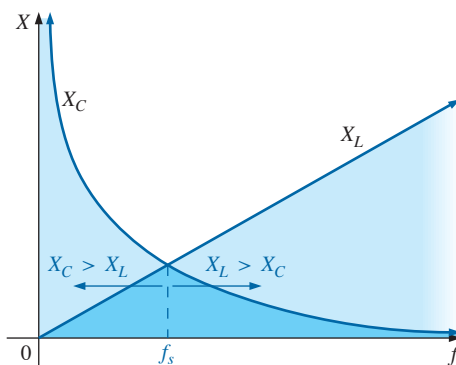


Figura 20.11 Resposta em frequência das reatâncias indutivas e capacitivas de um circuito R - L - C , plotadas no mesmo gráfico.

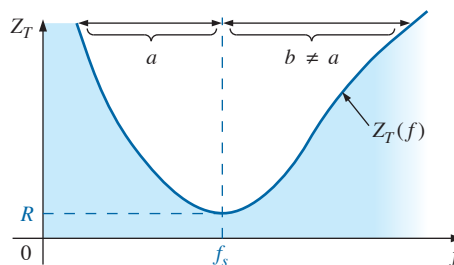


Figura 20.12 Z_T em função da frequência para um circuito ressonante em série.

No caso da função $\text{tg}^{-1} x$ (resultado obtido quando $X_L > X_C$), quanto maior o valor de x , maior o ângulo θ (mais próximo de 90°). Entretanto, no caso de $X_C > X_L$, temos de saber também que:

$$\text{tg}^{-1}(-x) = -\text{tg}^{-1}x \quad (20.16)$$

Em baixas frequências, $X_C > X_L$, e θ se aproxima de -90° (capacitivo), como vemos na Figura 20.13, enquanto em altas frequências, $X_L > X_C$, θ se aproxima de 90° . Portanto, em geral, para um circuito ressonante em série,

$f < f_s$: circuito capacitivo; **I** adiantado em relação a **E**;
 $f > f_s$: circuito indutivo; **E** adiantado em relação a **I**;
 $f = f_s$: circuito resistivo; **E** e **I** estão em fase.

20.5 SELETIVIDADE

Se plotarmos o módulo da corrente $I = E/Z_T$ em função da frequência para uma amplitude constante da tensão E , obteremos a curva mostrada na Figura 20.14, na qual a corrente aumenta de zero até um valor máximo de E/R (no ponto em que Z_T é mínima) e depois diminui até zero (enquanto Z_T aumenta) mais devagar do que aumentou para chegar ao máximo. Na verdade, a curva corresponde ao recíproco da curva da impedância em função da frequência. Como a curva de Z_T não é absolutamente simétrica em relação à frequência de ressonância, a curva

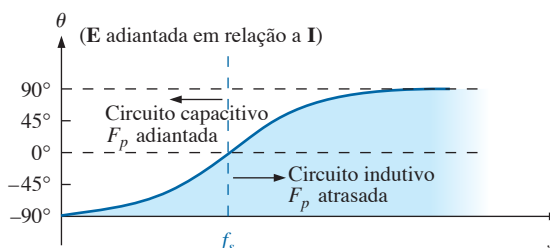


Figura 20.13 Gráfico de fase para o circuito ressonante em série.

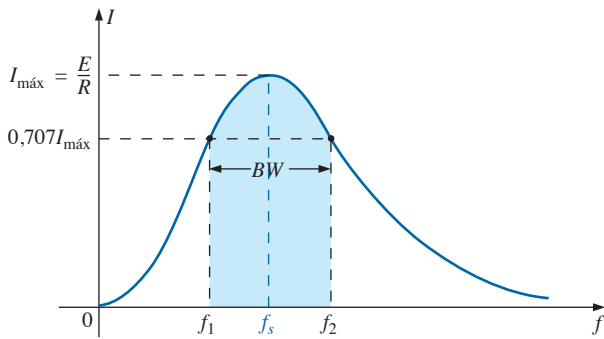


Figura 20.14 I em função da frequência para um circuito ressonante em série.

da corrente em função da frequência também tem o mesmo comportamento.

Existe uma faixa definida de frequência na qual a corrente está próxima do valor máximo, e a impedância, do valor mínimo. As frequências que correspondem a 0,707 da corrente máxima são denominadas **frequências de banda**, **frequências de corte**, **frequências de meia potência** ou **frequências de canto**. Elas são indicadas por f_1 e f_2 na Figura 20.14. A faixa de frequência entre as duas é conhecida como **largura de banda** (BW — *bandwidth*) do circuito ressonante.

Frequências de meia potência (*half-power frequencies*) são aquelas em que a potência dissipada é metade daquela que é dissipada na ressonância; ou seja,

$$P_{\text{HPF}} = \frac{1}{2} P_{\text{máx}} \quad (20.17)$$

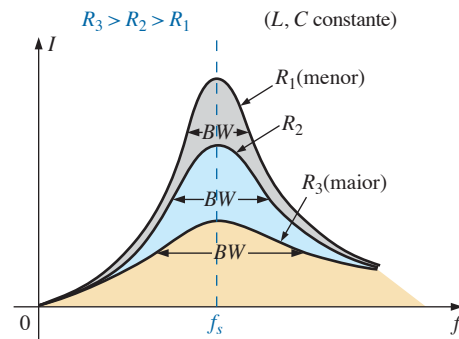
Essa equação é deduzida a partir de:

$$P_{\text{máx}} = I_{\text{máx}}^2 R$$

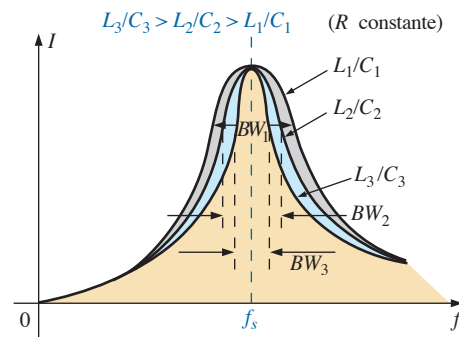
e $P_{\text{HPF}} = I^2 R = (0,707 I_{\text{máx}})^2 R = (0,5)(I_{\text{máx}}^2 R) = \frac{1}{2} P_{\text{máx}}$

Como o circuito ressonante é ajustado para selecionar uma faixa de frequências, a curva vista na Figura 20.14 é denominada **curva de seletividade**. Esse termo resulta do fato de que a curva expressa o quanto o circuito tem de ser *seletivo* para que as frequências desejadas estejam dentro da largura de banda. Quanto menor a largura de banda, maior a seletividade. A forma da curva, mostrada na Figura 20.15, depende de cada elemento do circuito R , L e C em série. Para valores constantes de indutância e capacitância, quanto menor a resistência, menor a largura de banda e maior a seletividade. De forma similar, para valores constantes de resistência, quanto maior a relação L/C , menor a largura de banda e maior a seletividade.

Em termos de Q_s , se R for maior para o mesmo X_L , então Q_s será menor, como mostra a equação $Q_s = \omega_s L/R$.



(a)



(b)

Figura 20.15 Efeitos de R , L e C sobre a curva de seletividade para o circuito ressonante em série.

Um Q_s pequeno, portanto, está associado a uma curva de ressonância com uma grande largura de banda e pequena seletividade, enquanto um Q_s elevado indica o contrário.

Para os circuitos em que $Q_s \geq 10$, costuma-se usar a aproximação de que a frequência de ressonância está no centro da largura de banda e a curva de ressonância é simétrica em relação à frequência da ressonância.

Uma curva traçada para essas condições é mostrada na Figura 20.16, na qual se pode ver que as frequências de corte são equidistantes da frequência de ressonância.

Isso não é verdade para qualquer Q_s . As frequências de corte f_1 e f_2 podem ser determinadas para o caso geral (qualquer Q_s) usando o fato de que uma queda da corrente para 0,707 do valor da ressonância corresponde a um aumento na impedância de $1/0,707 = \sqrt{2}$ vezes o valor na ressonância, que é R .

Substituindo $\sqrt{2}R$ na equação do módulo de Z_T , verificamos que:

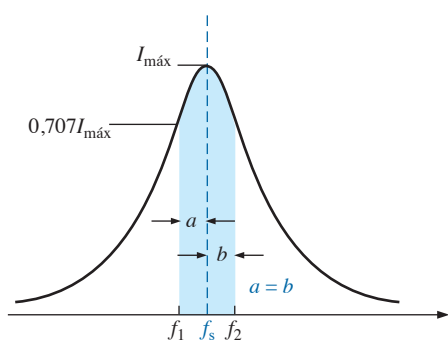


Figura 20.16 Curva aproximada para o circuito ressonante em série, válida para $Q_s \geq 10$.

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

se torna $\sqrt{2}R = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

ou, elevando os dois membros ao quadrado,

$$2R^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

e $R^2 = (X_L - X_C)^2$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos:

$$R = X_L - X_C \quad \text{ou} \quad R - X_L + X_C = 0$$

Primeiramente, consideraremos o caso em que $X_L > X_C$, que envolve f_2 ou ω_2 . Substituindo X_L por $\omega_2 L$ e X_C por $1/\omega_2 C$ e passando as duas grandezas para a esquerda da igualdade, temos:

$$R - \omega_2 L + \frac{1}{\omega_2 C} = 0 \quad \text{ou} \quad R\omega_2 - \omega_2^2 L + \frac{1}{C} = 0$$

que pode ser escrito na forma:

$$\omega_2^2 - \frac{R}{L}\omega_2 - \frac{1}{LC} = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos:

$$\omega_2 = \frac{-(-R/L) \pm \sqrt{[-(R/L)]^2 - [-(4/LC)]}}{2}$$

e
$$\omega_2 = +\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

com
$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right] \quad (\text{Hz}) \quad (20.18)$$

O sinal negativo em frente ao segundo fator foi ignorado porque $(1/2)\sqrt{(R/L)^2 + 4/LC}$ é sempre maior

que $R/(2L)$. Caso não fosse ignorado, haveria uma solução negativa para a frequência radial ω .

Se repetirmos os cálculos para o caso em que $X_C > X_L$, que envolve ω_1 ou f_1 , de maneira que $Z_T = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$, a solução em função de f_1 passará a ser:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right] \quad (\text{Hz}) \quad (20.19)$$

A largura de banda (BW) é dada por:

$$BW = f_2 - f_1 = \text{Equação 20.18} - \text{Equação 20.19}$$

e
$$BW = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} \quad (20.20)$$

Fazendo $R/L = \omega_s / Q_s$ a partir de $Q_s = \omega_s L / R$ e $1/2\pi = f_s / \omega_s$ a partir de $\omega_s = 2\pi f_s$, temos:

$$BW = \frac{R}{2\pi L} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{R}{L}\right) = \left(\frac{f_s}{\omega_s}\right)\left(\frac{\omega_s}{Q_s}\right)$$

ou
$$BW = \frac{f_s}{Q_s} \quad (20.21)$$

que é uma forma muito conveniente, pois relaciona a largura de banda ao Q_s do circuito. Conforme mencionado anteriormente, a Equação 20.21 confirma o fato de que, quanto maior o valor de Q_s , menor a largura de banda, e vice-versa.

Escrevendo a Equação 20.21 de maneira um pouco diferente, temos:

$$\frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{1}{Q_s} \quad (20.22)$$

A razão $(f_2 - f_1)/f_s$ é denominada algumas vezes de *largura de banda relativa*, fornecendo uma indicação da largura de banda comparada com a frequência de ressonância.

Também é possível demonstrar matematicamente, a partir das equações pertinentes, que a frequência de ressonância é igual à média geométrica das frequências de corte. Isto é,

$$f_s = \sqrt{f_1 f_2} \quad (20.23)$$

20.6 V_R , V_L e V_C

Plotando no mesmo gráfico o módulo (valor eficaz) das tensões V_R , V_L e V_C e da corrente I do circuito ressonante em série em função da frequência, obtemos as

curvas mostradas na Figura 20.17. Note que a curva de V_R tem a mesma forma que a curva de I e um valor de pico igual à amplitude da tensão de entrada E . A curva de V_C começa a crescer lentamente a partir de um valor igual ao da tensão de entrada, já que a reatância do capacitor é infinita (circuito aberto) na frequência zero e, nessa mesma frequência, a reatância do indutor é zero (curto circuito). À medida que a frequência aumenta, o fator $1/\omega C$ da equação

$$V_C = IX_C = (I) \left(\frac{1}{\omega C} \right)$$

diminui, mas a corrente I aumenta mais rapidamente do que $1/\omega C$ diminui. Portanto, V_C aumenta e continua a aumentar devido ao rápido crescimento da corrente, até que se aproxima da frequência de ressonância. À medida que se aproxima da condição de ressonância, a taxa de variação da corrente I diminui. Quando isso acontece, o fator $1/\omega C$, que diminui à medida que a frequência aumenta, supera a taxa de variação da corrente e V_C começa a cair. O valor máximo de V_C ocorre para uma frequência um pouco menor do que a frequência de ressonância. Após a ressonância, tanto V_C como I diminuem, e V_C tende para zero.

Quanto maior o Q_s do circuito, mais próximo $f_{Cm\acute{a}x}$ estará de f_s e mais próximo $V_{Cm\acute{a}x}$ estará de $Q_s E$. Para circuitos com $Q_s \geq 10$, $f_{Cm\acute{a}x} \cong f_s$ e $V_{Cm\acute{a}x} \cong Q_s E$.

A curva de V_L aumenta, de forma quase constante, de zero até a frequência de ressonância, pois as grandezas ωL e I da equação $V_L = IX_L = (I)(\omega L)$ aumentam nessa faixa de frequências. Na ressonância, I atinge o valor máximo, mas ωL ainda está crescendo. Portanto, V_L alcança um valor máximo um pouco depois da ressonância. Depois de passar pelo valor máximo, a tensão V_L começa a diminuir tendendo para E , pois a queda de I se torna maior que o aumento de ωL . Assim, V_L se aproxima de E porque X_L tende para o infinito, e X_C , para zero.

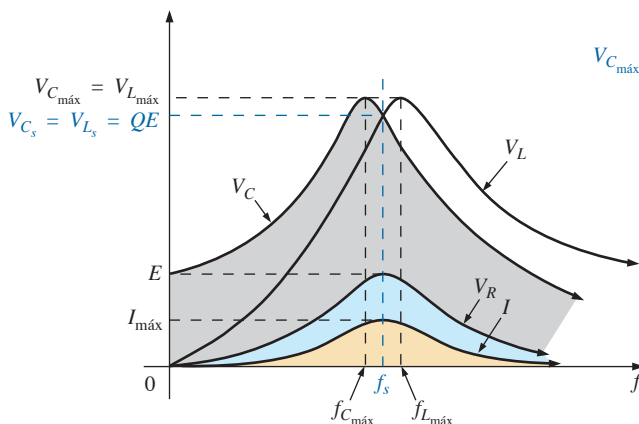


Figura 20.17 V_R, V_L, V_C e I em função da frequência para um circuito ressonante em série.

À medida que o Q_s do circuito aumenta, a frequência $f_{Lm\acute{a}x}$ diminui, aproximando-se de f_s , e $V_{Lm\acute{a}x}$ se aproxima de $Q_s E$. Em circuitos com $Q_s \geq 10$, $f_{Lm\acute{a}x} \cong f_s$ e $V_{Lm\acute{a}x} \cong Q_s E$.

Os valores de V_L são maiores do que V_C para qualquer frequência maior do que a frequência de ressonância, e os valores de V_C são maiores do que V_L para qualquer frequência menor do que a frequência de ressonância. Isso confirma o fato de que o circuito $R-L-C$ em série é predominantemente capacitivo para frequências entre zero e a frequência de ressonância, e predominantemente indutivo para frequências maiores do que a frequência de ressonância.

Quando $Q_s \geq 10$, as curvas da Figura 20.17 têm o aspecto mostrado na Figura 20.18. Observe que as curvas atingem o máximo (aproximadamente) na frequência de ressonância e são semelhantes no formato.

Resumindo:

1. V_C e V_L atingem seus valores máximos em frequências próximas da frequência de ressonância (dependendo de Q_s).
2. Em frequências muito baixas, V_C é praticamente igual à tensão da fonte, e V_L está muito próxima de zero; em frequências muito altas, V_L é praticamente igual à tensão da fonte e V_C se aproxima de zero.
3. A tensão V_R e a corrente I atingem seus valores máximos na frequência de ressonância, e as curvas são do mesmo formato.

20.7 EXEMPLOS (RESSONÂNCIA EM SÉRIE)

EXEMPLO 20.1

- a) Para o circuito ressonante em série visto na Figura 20.19, determine I, V_R, V_L e V_C na ressonância.

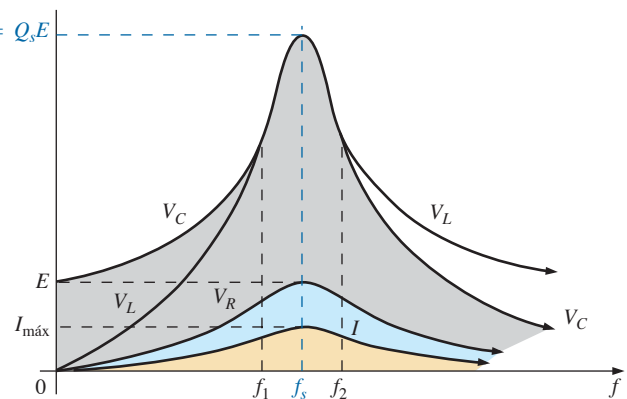


Figura 20.18 V_R, V_L, V_C e I em função da frequência para um circuito ressonante em série no qual $Q_s \geq 10$.

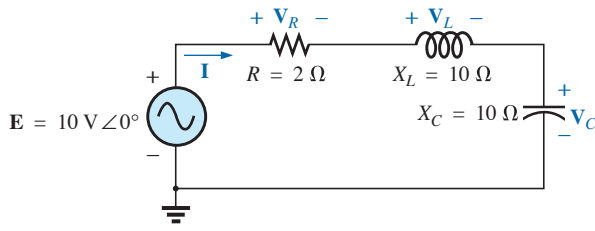


Figura 20.19 Exemplo 20.1.

- b) Qual é o Q_s do circuito?
- c) Se a frequência de ressonância é 5.000 Hz, determine a largura de banda.
- d) Qual é a potência dissipada no circuito nas frequências de meia potência?

Soluções:

a) $Z_{T_s} = R = 2 \Omega$

$$I = \frac{E}{Z_{T_s}} = \frac{10 \text{ V } \angle 0^\circ}{2 \Omega \angle 0^\circ} = 5 \text{ A } \angle 0^\circ$$

$$V_R = E = 10 \text{ V } \angle 0^\circ$$

$$\begin{aligned} V_L &= (I \angle 0^\circ)(X_L \angle 90^\circ) \\ &= (5 \text{ A } \angle 0^\circ)(10 \Omega \angle 90^\circ) \\ &= 50 \text{ V } \angle 90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_C &= (I \angle 0^\circ)(X_C \angle -90^\circ) \\ &= (5 \text{ A } \angle 0^\circ)(10 \Omega \angle -90^\circ) \\ &= 50 \text{ V } \angle -90^\circ \end{aligned}$$

b) $Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{10 \Omega}{2 \Omega} = 5$

c) $BW = f_2 - f_1 = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{5000 \text{ Hz}}{5} = 1000 \text{ Hz}$

d) $P_{\text{HPF}} = \frac{1}{2} P_{\text{max}} = \frac{1}{2} I_{\text{max}}^2 R = \left(\frac{1}{2}\right)(5 \text{ A})^2(2 \Omega) = 25 \text{ W}$

EXEMPLO 20.2

A largura de banda de um circuito ressonante em série é 400 Hz.

- a) Se a frequência de ressonância é 4.000 Hz, qual é o valor de Q_s ?
- b) Se $R = 10 \text{ W}$, qual é o valor de X_L na ressonância?
- c) Calcule a indutância L e a capacitância C do circuito.
- d) Quais são os prováveis valores comerciais de L e C ?

Soluções:

a) $BW = \frac{f_s}{Q_s}$ ou $Q_s = \frac{f_s}{BW} = \frac{4000 \text{ Hz}}{400 \text{ Hz}} = 10$

b) $Q_s = \frac{X_L}{R}$ ou $X_L = Q_s R = (10)(10 \Omega) = 100 \Omega$

c) $X_L = 2\pi f_s L$ ou $L = \frac{X_L}{2\pi f_s} = \frac{100 \Omega}{2\pi(4000 \text{ Hz})} = 3,98 \text{ mH}$

$X_C = \frac{1}{2\pi f_s C}$ ou $C = \frac{1}{2\pi f_s X_C} = \frac{1}{2\pi(4000 \text{ Hz})(100 \Omega)} = 397,89 \text{ nF}$

d) $L = 3,98 \text{ mH} \cong 3,9 \text{ mH}$
 $C = 397,89 \text{ nF} \cong 390 \text{ nF} = 0,39 \mu\text{F}$

EXEMPLO 20.3

Um circuito R - L - C em série possui uma frequência de ressonância de 12.000 Hz.

- a) Se $R = 5 \Omega$ e X_L na ressonância é 300 Ω , calcule a largura de banda.
- b) Calcule as frequências de corte.

Soluções:

a) $Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{300 \Omega}{5 \Omega} = 60$

$$BW = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{12,000 \text{ Hz}}{60} = 200 \text{ Hz}$$

- b) Como $Q_s \geq 10$, f_s fica no centro da largura de banda. Portanto,

$$f_2 = f_s + \frac{BW}{2} = 12,000 \text{ Hz} + 100 \text{ Hz} = 12,100 \text{ Hz}$$

e $f_1 = 12,000 \text{ Hz} - 100 \text{ Hz} = 11,900 \text{ Hz}$

EXEMPLO 20.4

- a) Determine o Q_s e a largura de banda para a curva de resposta vista na Figura 20.20.
- b) Para $C = 100 \text{ nF}$, determine L e R para o circuito ressonante em série.
- c) Determine a tensão aplicada.

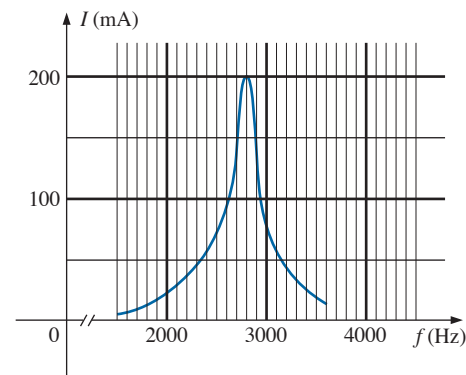


Figura 20.20 Exemplo 20.4.

Soluções:

a) A frequência de ressonância é 2.800 Hz. Para os pontos que valem 0,707 vezes o valor máximo, temos:

$$BW = 200 \text{ Hz}$$

$$e) \quad Q_s = \frac{f_s}{BW} = \frac{2800 \text{ Hz}}{200 \text{ Hz}} = 14$$

$$b) \quad f_s = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \text{ ou } L = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 (2,8 \text{ kHz})^2 (100 \text{ nF})}$$

$$= 32,3 \text{ mH}$$

$$Q_s = \frac{X_L}{R} \text{ ou } R = \frac{X_L}{Q_s}$$

$$= \frac{2\pi(2800 \text{ Hz})(32,3 \text{ mH})}{14}$$

$$= 40,6 \Omega$$

$$c) \quad I_{\text{máx}} = \frac{E}{R} \text{ ou } E = I_{\text{máx}} R$$

$$= (200 \text{ mA})(40,6 \Omega) = 8,12 \text{ V}$$

EXEMPLO 20.5

Um circuito R - L - C em série é projetado para entrar em ressonância em $\omega_s = 10^5 \text{ rad/s}$, com uma largura de banda de $0,15\omega_s$, e consome 16 W de uma fonte de 120 V na ressonância.

- Determine o valor de R .
- Calcule a largura de banda em hertz.
- Calcule os valores nominais de L e C .
- Qual o Q_s do circuito?
- Determine a largura de banda relativa.

Soluções:

$$a) \quad P = \frac{E^2}{R} \quad e \quad R = \frac{E^2}{P} = \frac{(120 \text{ V})^2}{16 \text{ W}} = 900 \Omega$$

$$b) \quad f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{10^5 \text{ rad/s}}{2\pi} = 15.915,49 \text{ Hz}$$

$$BW = 0,15f_s = 0,15(15.915,49 \text{ Hz})$$

$$= 2387,32 \text{ Hz}$$

c) Equação (20.20):

$$BW = \frac{R}{2\pi L} \quad e \quad L = \frac{R}{2\pi BW} = \frac{900 \Omega}{2\pi(2387,32 \text{ Hz})}$$

$$= 60 \text{ mH}$$

$$f_s = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad e \quad C = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 L}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 (15.915,49 \text{ Hz})^2 (60 \times 10^{-3})}$$

$$= 1,67 \text{ nF}$$

$$d) \quad Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{2\pi f_s L}{R} = \frac{2\pi(15.915,49 \text{ Hz})(60 \text{ mH})}{900 \Omega}$$

$$= 6,67$$

$$e) \quad \frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{BW}{f_s} = \frac{1}{Q_s} = \frac{1}{6,67} = 0,15$$

RESSONÂNCIA EM PARALELO

20.8 CIRCUITO RESSONANTE EM PARALELO

A configuração básica de um circuito ressonante em série é uma combinação de um circuito R - L - C em série com uma fonte de tensão aplicada. O circuito ressonante em paralelo possui a configuração básica vista na Figura 20.21 — uma combinação de um circuito R - L - C em paralelo com uma fonte de corrente.

No caso do circuito ressonante em série, a impedância era mínima na ressonância, proporcionando uma corrente significativa que resultava em valores consideráveis de tensão de V_C e V_L . No circuito ressonante em paralelo, a impedância é relativamente alta na ressonância, proporcionando valores significativos de tensão para V_C e V_L determinados pela lei de Ohm ($V_C = IZ_T$). No caso do circuito visto na Figura 20.21, a ressonância ocorre quando $X_L = X_C$, e a curva de V_p em função da frequência tem a mesma forma que as curvas de V_C e V_L do circuito ressonante em série.

Se o circuito equivalente prático da Figura 20.22 tivesse o mesmo formato visto na Figura 20.21, sua análise seria tão simples e direta quanto a do circuito ressonante em série. Entretanto, na prática, deve-se considerar a resistência interna do indutor em série, conforme mostra a Figura 20.22. A resistência R_i não pode ser simplesmente combinada em série ou em paralelo com a resistência da fonte ou com qualquer outra resistência colocada intencionalmente no

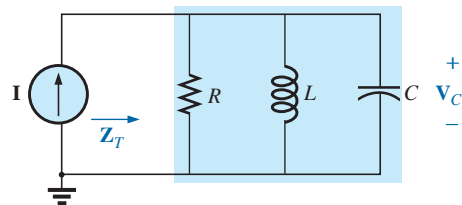


Figura 20.21 Circuito ressonante em paralelo ideal.

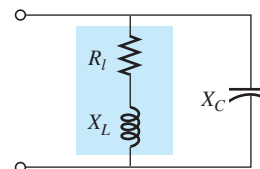


Figura 20.22 Circuito L - C em paralelo prático.

circuito. Embora R_l seja em geral relativamente pequena em comparação com outras resistências e reatâncias do circuito, ela pode ter uma influência importante sobre as condições de ressonância dos circuitos ressonantes em paralelo, como será visto nas próximas seções. Em outras palavras, o circuito visto na Figura 20.21 é um circuito idealizado que só constitui uma boa aproximação para um circuito real em circunstâncias muito específicas.

Nossa primeira tarefa será encontrar um circuito paralelo equivalente (nos terminais) ao ramo R - L em série, que vemos na Figura 20.22, usando a técnica apresentada na Seção 15.10. Ou seja,

$$Z_{R-L} = R_l + jX_L$$

$$\begin{aligned} \text{e } Y_{R-L} &= \frac{1}{Z_{R-L}} = \frac{1}{R_l + jX_L} \\ &= \frac{R_l}{R_l^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R_l^2 + X_L^2} \\ &= \frac{1}{R_l^2 + X_L^2} + j \left(\frac{1}{\frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L}} \right) = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_{L_p}} \end{aligned}$$

com
$$R_p = \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l} \quad (20.24)$$

e
$$X_{L_p} = \frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} \quad (20.25)$$

como mostra a Figura 20.23.

Redesenhando o circuito visto na Figura 20.22 com o equivalente mostrado na Figura 20.23, e levando em conta o fato de que a fonte possui uma resistência interna R_s , obtemos o circuito da Figura 20.24.

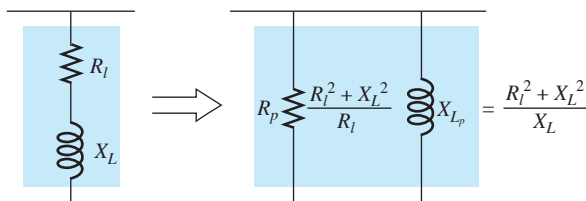


Figura 20.23 Circuito em paralelo equivalente a uma combinação R - L em série.

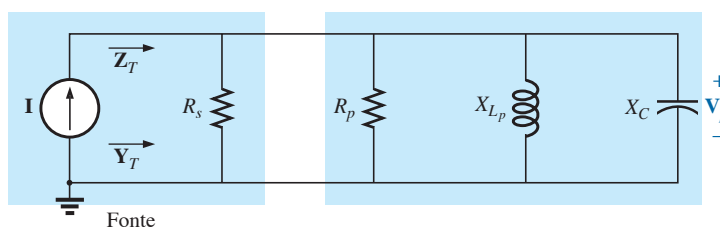


Figura 20.24 Substituição da combinação R - L em série da Figura 20.22 por um circuito equivalente em paralelo.

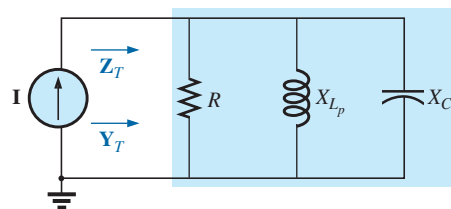


Figura 20.25 Substituição de $R_s \parallel R_p$ por R no circuito visto na Figura 20.24.

Se definirmos a combinação de R_s e R_p em paralelo pela notação:

$$R = R_s \parallel R_p \quad (20.26)$$

teremos o circuito visto na Figura 20.25. Ele tem o mesmo formato que a configuração ideal vista na Figura 20.21.

Chegamos agora a um ponto no qual podemos definir as condições de ressonância para o circuito ressonante paralelo. Lembre-se de que, para os circuitos ressonantes em série, a frequência de ressonância era aquela na qual a impedância era mínima, a corrente era máxima, a impedância de entrada era puramente resistiva e o circuito possuía um fator de potência unitário. Nos circuitos ressonantes em paralelo, como a resistência R_p no circuito equivalente depende da frequência, a frequência para a qual o valor máximo de V_C é obtida não é necessariamente a mesma para a qual o fator de potência é unitário. Como as duas condições normalmente são utilizadas para definir o estado ressonante, a frequência em que cada uma ocorre é designada por índices diferentes.

Fator de potência unitário, f_p

Para o circuito visto na Figura 20.25:

$$\begin{aligned} Y_T &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_{L_p}} + \frac{1}{-jX_C} \\ &= \frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{X_{L_p}} \right) + j \left(\frac{1}{X_C} \right) \end{aligned}$$

e
$$Y_T = \frac{1}{R} + j \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{L_p}} \right) \quad (20.27)$$

Para que o fator de potência seja unitário, a componente reativa deve ser nula, conforme definida por:

$$\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{L_p}} = 0$$

Portanto:
$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_{L_p}}$$

e
$$X_{L_p} = X_C \tag{20.28}$$

Substituindo para X_{L_p} , temos:

$$\frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} = X_C \tag{20.29}$$

A frequência de ressonância f_p pode ser determinada a partir da Equação 20.29, como mostrado a seguir:

$$R_l^2 + X_L^2 = X_C X_L = \left(\frac{1}{\omega C}\right) \omega L = \frac{L}{C}$$

ou
$$X_L^2 = \frac{L}{C} - R_l^2$$

com
$$2\pi f_p L = \sqrt{\frac{L}{C} - R_l^2}$$

e
$$f_p = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{L}{C} - R_l^2}$$

Multiplicando o numerador e o denominador dentro da raiz por C/L , obtemos:

$$f_p = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{1 - R_l^2(C/L)}{C/L}} = \frac{1}{2\pi L \sqrt{C/L}} \sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}}$$

e
$$f_p = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}} \tag{20.30}$$

ou
$$f_p = f_s \sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}} \tag{20.31}$$

onde f_p é a frequência de ressonância do circuito ressonante paralelo (para $F_p = 1$) e f_s , a frequência de ressonância determinada pela condição $X_L = X_C$. Observe que, ao contrário do que acontece nos circuitos ressonantes em série, a frequência de ressonância f_p depende da resistência (nesse caso, R_l). Entretanto, observe também a ausência de uma resistência de fonte R_s nas equações 20.30 e 20.31. Como o fator $\sqrt{1 - (R_l^2 C/L)}$ é menor do que a unidade, f_p é menor do que f_s . Reconhece-se também que, à medida que o valor de R_l se aproxima de zero, f_p se aproxima rapidamente de f_s .

Impedância máxima, f_m

Em $f = f_p$, a impedância de entrada do circuito ressonante em paralelo está próxima do seu valor máximo, porém, não o atingiu ainda, pois R_p depende da frequência. Conforme mostra a Figura 20.26, a frequência para a qual a impedância é máxima, representada pelo símbolo f_m , é ligeiramente maior que f_p . A frequência f_m pode ser determinada derivando a expressão geral para a impedância em relação à frequência e igualando o resultado a zero. O cálculo é muito trabalhoso, e não será reproduzido aqui. Entretanto, o resultado da equação é o seguinte:

$$f_m = f_s \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{R_l^2 C}{L}\right)} \tag{20.32}$$

Observe a semelhança com a Equação 20.31. Como o fator dentro da raiz quadrada da Equação 20.32 é sempre maior que o correspondente da Equação 20.31, f_m está sempre mais próximo de f_s e maior do que f_p . Ou seja,

$$f_s > f_m > f_p \tag{20.33}$$

Uma vez determinado o valor de f_m , o circuito visto na Figura 20.25 pode ser usado para determinar o módulo e a fase da impedância total na condição de ressonância pela simples substituição de $f = f_m$ e execução dos cálculos necessários. Ou seja,

$$Z_{T_m} = R \parallel X_{L_p} \parallel X_C \Big|_{f=f_m} \tag{20.34}$$

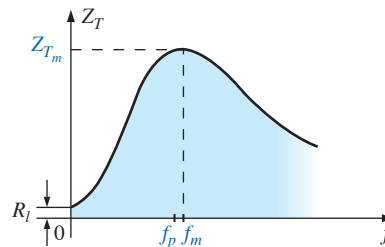


Figura 20.26 Z_T em função da frequência para o circuito ressonante paralelo.

20.9 CURVA DE SELETIVIDADE PARA CIRCUITOS RESSONANTES EM PARALELO

A curva de Z_T em função da frequência, vista na Figura 20.26, mostra claramente que o circuito ressonante em paralelo alcança sua impedância máxima na ressonância (f_m), ao contrário do circuito ressonante em série, cuja impedância é mínima na ressonância. Note também que Z_T é aproximadamente igual a R_l em $f = 0$ Hz, pois $Z_T = R_s \parallel R_l \cong R_l$.

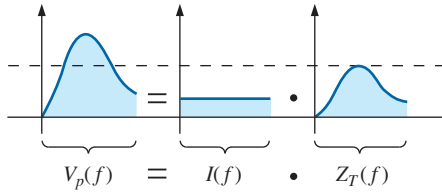


Figura 20.27 Forma da curva de $V_p(f)$.

Como a corrente I da fonte de corrente é constante para qualquer valor de Z_T ou frequência, a curva da tensão no circuito paralelo em função da frequência tem a mesma forma que a curva da impedância total Z_T , como mostra a Figura 20.27.

Para o circuito paralelo, a curva de ressonância de interesse é a da tensão V_C no capacitor. A razão para esse interesse em V_C vem dos circuitos eletrônicos que fazem frequentemente uso de um capacitor na entrada do outro estágio do circuito.

Como a tensão entre os terminais de elementos em paralelo é igual,

$$V_C = V_p = IZ_T \tag{20.35}$$

Portanto, o valor de V_C na ressonância é determinado pelo valor de Z_{Tm} e pela intensidade da corrente I da fonte de corrente.

O fator de qualidade de um circuito ressonante em paralelo também é dado pela razão entre a potência reativa e a potência real. Ou seja,

$$Q_p = \frac{V_p^2/X_{L_p}}{V_p^2/R}$$

onde $R = R_s \parallel R_p$, e V_p é a tensão nos ramos em paralelo. O resultado é:

$$Q_p = \frac{R}{X_{L_p}} = \frac{R_s \parallel R_p}{X_{L_p}} \tag{20.36a}$$

ou, como $X_{L_p} = X_C$ na ressonância,

$$Q_p = \frac{R_s \parallel R_p}{X_C} \tag{20.36b}$$

Para uma fonte de corrente ideal ($R_s = \infty \Omega$) ou quando R_s for muito maior do que R_p , podemos usar a seguinte aproximação:

$$R = R_s \parallel R_p \cong R_p$$

e

$$Q_p = \frac{R_s \parallel R_p}{X_{L_p}} = \frac{R_p}{X_{L_p}} = \frac{(R_l^2 + X_l^2)/R_l}{(R_l^2 + X_l^2)/X_L}$$

de modo que

$$Q_p = \frac{X_L}{R_l} = Q_l \tag{20.37}$$

$R_s \gg R_p$

que é simplesmente o fator de qualidade do indutor Q_l .

Em geral, a largura de banda ainda está relacionada com a frequência de ressonância e com o fator de qualidade do circuito por:

$$BW = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q_p} \tag{20.38}$$

As frequências de corte f_1 e f_2 podem ser obtidas usando-se o circuito equivalente visto na Figura 20.25 e a condição de fator de potência unitário para a ressonância. As frequências de meia potência são definidas pela condição de que a tensão de saída deve ser 0,707 vezes o valor máximo. Entretanto, no caso do circuito ressonante em paralelo alimentado por uma fonte de corrente, a resposta em frequência da impedância é a mesma para a tensão de saída. Essa semelhança permite definir as frequências de corte como frequências nas quais a impedância de entrada é 0,707R ou $(1/\sqrt{2})R$.

Igualando a impedância do circuito mostrado na Figura 20.25 a esse valor, temos a seguinte relação:

$$|Z| = Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = 0,707R = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

ou

$$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{R}$$

Elevando os dois lados ao quadrado, temos:

$$\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 = \frac{2}{R^2}$$

que resulta em:

$$\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 = \frac{1}{R^2}$$

A equação do quarto grau resultante para ω resulta em duas equações do segundo grau para ω :

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = -\frac{1}{R}$$

e

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{R}$$

Resolvendo cada uma para o resultado positivo de ω , temos

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

e

$$\omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

de modo que $f_1 = \frac{1}{4\pi C} \left[-\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right]$ (20.39a)

$$f_2 = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right]$$
 (20.39b)

O efeito de R_l , L e C sobre a curva de resposta do circuito ressonante em paralelo, como se pode ver na Figura 20.28, para a curva da impedância de entrada, é semelhante ao efeito sobre a resposta do circuito ressonante em série. Se R_l é ou não é zero, o circuito ressonante em paralelo constantemente aparece em um esquema de circuito conforme mostra a Figura 20.28.

Na ressonância, um aumento de R_l ou uma diminuição na relação L/C resulta em uma diminuição da impe-

dância de ressonância, com um aumento correspondente na corrente. A largura de banda das curvas de ressonância é dada pela Equação 20.38. Para aumentar R_l ou diminuir L (ou L/C para C constante), a largura de banda aumenta, como mostrado na Figura 20.28.

Em baixas frequências, a reatância capacitiva é muito elevada, e a reatância indutiva, pequena. Como os elementos estão em paralelo, a impedância total em baixas frequências é indutiva. Em altas frequências, ocorre o inverso, e o circuito é capacitivo. Na ressonância (f_p), o circuito se torna resistivo. Esses fatos levam à curva de fase, mostrada na Figura 20.29. Note que essa curva tem um comportamento contrário à de fase do circuito ressonante em série, que representa um comportamento capacitivo em baixa frequência e um comportamento indutivo em altas frequências.

20.10 EFEITO DE $Q_l \geq 10$

A seção anterior pode ter deixado a impressão de que a análise de circuitos ressonantes em paralelo é muito mais complexa do que a de circuitos ressonantes em série. Felizmente, esse não é o caso, já que, para a maioria dos circuitos ressonantes em paralelo o fator de qualidade do indutor, Q_l , é suficientemente elevado para que seja

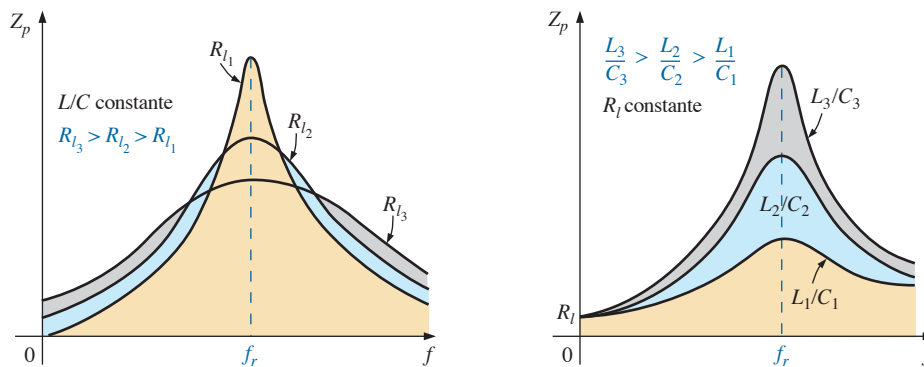


Figura 20.28 Influência de R_l , L e C na curva de impedância de um circuito ressonante em paralelo.

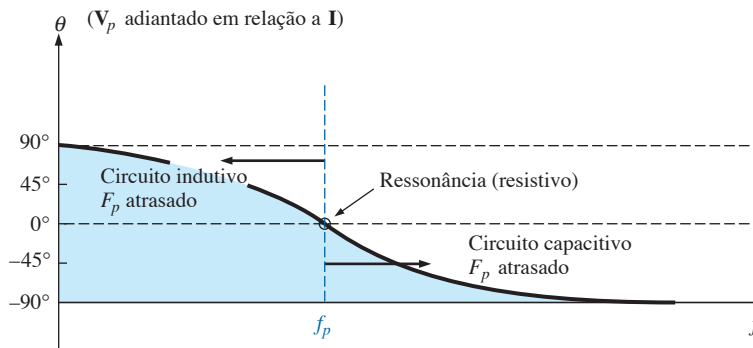


Figura 20.29 Gráfico de fase para o circuito ressonante em paralelo.

possível introduzir várias aproximações que simplificam consideravelmente a análise do circuito.

Reatância indutiva, X_{Lp}

Se expandirmos X_{Lp} com a expressão:

$$X_{Lp} = \frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} = \frac{R_l^2(X_L)}{X_L(X_L)} + X_L = \frac{X_L}{Q_l^2} + X_L$$

então, para $Q_l \geq 10$, $1/Q_l^2 \ll 1$ e, portanto,

$$\frac{X_L}{Q_l^2} + X_L = X_L \left(\frac{1}{Q_l^2} + 1 \right) \cong X_L$$

que resulta em: $X_{Lp} \cong X_L$ $Q_l \geq 10$ (20.40)

e como a ressonância é definida por $X_{Lp} = X_C$, a condição de ressonância se reduz a:

$$X_L \cong X_C$$
 $Q_l \geq 10$ (20.41)

Frequência de ressonância, f_p (fator de potência unitário)

Podemos reescrever o fator $R_l^2 C/L$ da Equação 20.31 da seguinte forma:

$$\frac{R_l^2 C}{L} = \frac{1}{\frac{L}{R_l^2 C}} = \frac{1}{\frac{(\omega)}{(\omega)} \frac{L}{R_l^2 C}} = \frac{1}{\frac{\omega L}{R_l^2 \omega C}} = \frac{1}{\frac{X_L X_C}{R_l^2}}$$

e substituir a Equação 20.41 ($X_L \cong X_C$):

$$\frac{1}{\frac{X_L X_C}{R_l^2}} = \frac{1}{\frac{X_L^2}{R_l^2}} = \frac{1}{Q_l^2}$$

Nesse caso, a Equação 20.31 se transforma em:

$$f_p = f_s \sqrt{1 - \frac{1}{Q_l^2}}$$
 $Q_l \geq 10$ (20.42)

revelando claramente que, à medida que Q_l aumenta, f_p se aproxima mais e mais de f_s .

Para $Q_l \geq 10$,

$$1 - \frac{1}{Q_l^2} \cong 1$$

e $f_p \cong f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ $Q_l \geq 10$ (20.43)

Frequência de ressonância, f_m (V_C máxima)

Usando a equivalência $R_l^2 C/L = 1/Q_l^2$, deduzida para a Equação 20.42, a Equação 20.32 fica da seguinte maneira:

$$f_m \cong f_s \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{Q_l^2} \right)}$$
 $Q_l \geq 10$ (20.44)

O fato de o termo negativo dentro do radical ser sempre menor que o que aparece na equação para f_p revela que f_m está sempre mais próximo de f_s do que f_p .

Para $Q_l \geq 10$, o termo negativo se torna muito pequeno, e pode ser desprezado, o que resulta em:

$$f_m \cong f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
 $Q_l \geq 10$ (20.45)

Portanto, em resumo, para $Q_l \geq 10$:

$$f_p \cong f_m \cong f_s$$
 $Q_l \geq 10$ (20.46)

R_p

$$R_p = \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l} = R_l + \frac{X_L^2}{R_l} \left(\frac{R_l}{R_l} \right) = R_l + \frac{X_L^2}{R_l^2} R_l = R_l + Q_l^2 R_l = (1 + Q_l^2) R_l$$

Para $Q_l \geq 10$, $1 + Q_l^2 \cong Q_l^2$, e

$$R_p \cong Q_l^2 R_l$$
 $Q_l \geq 10$ (20.47)

Aplicando as aproximações obtidas ao circuito da Figura 20.24, obtemos o circuito equivalente aproximado para $Q_l \geq 10$ da Figura 20.30, que certamente tem uma aparência muito ‘mais limpa’.

Substituindo $Q_l = \frac{X_L}{R_l}$ na Equação 20.47, temos:

$$R_p \cong Q_l^2 R_l = \left(\frac{X_L}{R_l} \right)^2 R_l = \frac{X_L^2}{R_l} = \frac{X_L X_C}{R_l} = \frac{2\pi f L}{R_l (2\pi f C)}$$

e $R_p \cong \frac{L}{R_l C}$ $Q_l \geq 10$ (20.48)

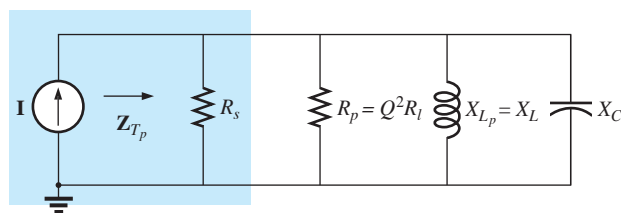


Figura 20.30 Circuito equivalente aproximado para $Q_l \geq 10$.

Z_{Tp}

A impedância total na ressonância agora é definida por:

$$Z_{Tp} \cong R_s \parallel R_p = R_s \parallel Q_l^2 R_l \quad Q_l \geq 10 \quad (20.49)$$

Para uma fonte de corrente ideal ($R_s = \infty \Omega$), ou se $R_s \gg R_p$, a equação se reduz a

$$Z_{Tp} \cong Q_l^2 R_l \quad Q_l \geq 10, R_s \gg R_p \quad (20.50)$$

Q_p

O fator de qualidade agora é definido por

$$Q_p = \frac{R}{X_{Lp}} \cong \frac{R_s \parallel Q_l^2 R_l}{X_L} \quad (20.51)$$

É óbvio, portanto, que R_s afeta o fator de qualidade do circuito e a forma da curva de ressonância.

Se uma fonte de corrente ideal ($R_s = \infty \Omega$) for usada, ou se $R_s \gg R_p$,

$$Q_p \cong \frac{R_s \parallel Q_l^2 R_l}{X_L} = \frac{Q_l^2 R_l}{X_L} = \frac{Q_l^2}{X_L/R_l} = \frac{Q_l^2}{Q_l}$$

e $Q_p \cong Q_l \quad Q_l \geq 10, R_s \gg R_p \quad (20.52)$

BW

A largura de banda definida em função de f_p é dada por:

$$BW = f_2 - f_1 = \frac{f_p}{Q_p} \quad (20.53)$$

Substituindo Q_p na equação acima e fazendo algumas manipulações algébricas, podemos mostrar que:

$$BW = f_2 - f_1 \cong \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R_l}{L} + \frac{1}{R_s C} \right] \quad (20.54)$$

o que revela claramente a influência de R_s sobre a largura de banda. Se $R_s = \infty \Omega$ (fonte de corrente ideal), temos:

$$BW = f_2 - f_1 \cong \frac{R_l}{2\pi L} \quad R_s = \infty \Omega \quad (20.55)$$

I_l e I_C

Uma parte da Figura 20.30 foi reproduzida na Figura 20.31, com I_T definida como mostrado.

Conforme indica a figura, na ressonância, Z_{Tp} assume o valor $Q_l^2 R_l$. A tensão no circuito em paralelo é, portanto,

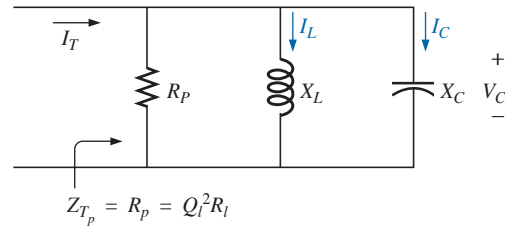


Figura 20.31 Determinação de I_C e I_L em função da corrente da fonte, I_T .

$$V_C = V_L = V_R = I_T Z_{Tp} = I_T Q_l^2 R_l$$

A intensidade da corrente I_C pode ser obtida usando a lei de Ohm, como a seguir:

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{I_T Q_l^2 R_l}{X_C}$$

Substituindo $X_C = X_L$ para $Q_l \geq 10$, temos:

$$I_C = \frac{I_T Q_l^2 R_l}{X_L} = I_T \frac{Q_l^2}{X_L/R_l} = I_T \frac{Q_l^2}{Q_l}$$

e $I_C \cong Q_l I_T \quad Q_l \geq 10 \quad (20.56)$

o que mostra que a corrente capacitiva é Q_l vezes a magnitude da corrente que entra no circuito ressonante em paralelo. Para um valor maior de Q_l , a corrente I_C poderá ser considerável.

Uma dedução semelhante leva a:

$$I_L \cong Q_l I_T \quad Q_l \geq 10 \quad (20.57)$$

Conclusões

As equações resultantes da aplicação da condição $Q_l \geq 10$ são, obviamente, bem mais simples do que aquelas obtidas anteriormente. Portanto, essa condição tem de ser verificada antes de iniciar a análise de um circuito para saber qual conjunto de equações deve ser usado. Embora a condição $Q_l \geq 10$ tenha sido usada em toda a análise, muitas das equações ainda representam uma boa aproximação para $Q_l < 10$. Por exemplo, se $Q_l = 5$, $X_{Lp} = (X_L/Q_l^2) + X_L = (X_L/25) + X_L = 1,04X_L$, que é praticamente igual a X_L . Mesmo para $Q_l = 2$, $X_{Lp} = (X_L/4) + X_L = 1,25X_L$, o que pode não ser exatamente X_L , mas difere de X_L em apenas 25 por cento. Em geral, saiba que as equações aproximadas podem ser usadas com uma precisão razoável mesmo sendo $Q_l < 10$. Entretanto, quanto menor o valor de Q_l , pior será a aproximação. De qualquer maneira, as equações

aproximadas certamente são válidas para um intervalo de valores de $Q_l < 10$, se tudo que se desejar for apenas uma idéia razoável da resposta do circuito, e não um resultado exato até a casa decimal das centenas.

20.11 TABELA DE RESULTADOS

A Tabela 20.1 foi preparada com o objetivo de evitar as confusões resultantes da introdução das frequências f_p e f_m e a escolha das equações aproximadas que dependem de Q_l . Uma coluna apresenta as equações que podem ser usadas para qualquer valor de Q_l , mas, sempre que possível, vale a pena utilizar as equações aproximadas.

Nas próximas vezes, procure seguir os passos a seguir ao analisar um circuito ressonante em paralelo:

1. Determine f_s para ter uma ideia da frequência de ressonância. Lembre-se de que, na maioria dos casos, f_s, f_m e f_p terão valores relativamente próximos.
2. Calcule um Q_l aproximado usando o valor de f_s obtido anteriormente e verifique se ele satisfaz a condição $Q_l \geq 10$. Se a resposta for afirmativa, as equações aproximadas devem ser escolhidas, a menos que seja necessário uma precisão maior nos resultados.
3. Se Q_l for menor que 10, as fórmulas aproximadas poderão ser usadas, mas terá de ficar entendido que, quanto menor o valor de Q_l , menor a precisão dos resultados. Entretanto, considerando as variações típicas em relação aos valores nominais de muitos dos componentes comerciais e também que raramente é necessário especificar a frequência de ressonância com várias casas decimais, o uso das fórmulas aproximadas pode ser satisfatório em muitas circunstâncias.

20.12 EXEMPLOS (RESSONÂNCIA EM PARALELO)

EXEMPLO 20.6

Dado o circuito ressonante em paralelo visto na Figura 20.32, composto de elementos ‘ideais’:

- a) Determine a frequência de ressonância f_p .
- b) Calcule a impedância total na ressonância.
- c) Calcule o fator de qualidade, a largura de banda e as frequências de corte f_1 e f_2 do sistema.
- d) Determine a tensão V_C na ressonância.
- e) Determine as correntes I_L e I_C na ressonância.

Soluções:

- a) O fato de R_l ser nulo resulta em um valor de $Q_l (=X_L/R_l)$ muito elevado, o que permite o uso da seguinte expressão aproximada para o cálculo de f_p :

$$f_p = f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1 \text{ mH})(1 \mu\text{F})}} = 5,03 \text{ kHz}$$

- b) Para os elementos reativos em paralelo,

$$\mathbf{Z}_L \parallel \mathbf{Z}_C = \frac{(X_L \angle 90^\circ)(X_C \angle -90^\circ)}{+j(X_L - X_C)}$$

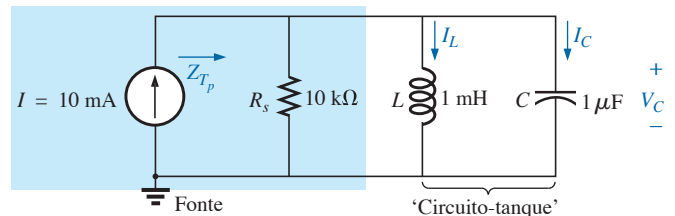


Figura 20.32 Exemplo 20.6.

Tabela 20.1 Circuito ressonante em paralelo ($f_s = 1/(2\pi\sqrt{LC})$).

	Qualquer Q_l	$Q_l \geq 10$	$Q_l \geq 10, R_s \gg Q_l^2 R_l$
f_p	$f_s \sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}}$	f_s	f_s
f_m	$f_s \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left[\frac{R_l^2 C}{L} \right]}$	f_s	f_s
Z_{T_p}	$R_s \parallel R_p = R_s \parallel \left(\frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l} \right)$	$R_s \parallel Q_l^2 R_l$	$Q_l^2 R_l$
Z_{T_m}	$R_s \parallel \mathbf{Z}_{R-L} \parallel \mathbf{Z}_C$	$R_s \parallel Q_l^2 R_l$	$Q_l^2 R_l$
Q_p	$\frac{Z_{T_p}}{X_{L_p}} = \frac{Z_{T_p}}{X_C}$	$\frac{Z_{T_p}}{X_L} = \frac{Z_{T_p}}{X_C}$	Q_l
BW	$\frac{f_p}{Q_p}$ ou $\frac{f_m}{Q_p}$	$\frac{f_p}{Q_p} = \frac{f_s}{Q_p}$	$\frac{f_p}{Q_l} = \frac{f_s}{Q_l}$
I_L, I_C	Análise do circuito	$I_L = I_C = Q_l I_T$	$I_L = I_C = Q_l I_T$

mas $X_L = X_C$ na ressonância, o que resulta em um valor zero no denominador da equação e em uma impedância extremamente alta, que pode ser aproximada por um circuito aberto. Portanto,

$$Z_{T_p} = R_s \parallel Z_L \parallel Z_C = R_s = 10 \text{ k}\Omega$$

$$c) Q_p = \frac{R_s}{X_{L_p}} = \frac{R_s}{2\pi f_p L} = \frac{10 \text{ k}\Omega}{2\pi(5,03 \text{ kHz})(1 \text{ mH})} = 316,41$$

$$BW = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{5,03 \text{ kHz}}{316,41} = 15,90 \text{ Hz}$$

Equação 20.39a:

$$f_1 = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{1}{R} - \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi(1 \mu\text{F})} \left[\frac{1}{10 \text{ k}\Omega} - \sqrt{\frac{1}{(10 \text{ k}\Omega)^2} + \frac{4(1 \mu\text{F})}{1 \text{ mH}}} \right]$$

$$= 5,03 \text{ kHz}$$

Equação 20.39b:

$$f_2 = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right]$$

$$= 5,04 \text{ kHz}$$

$$d) V_C = IZ_{T_p} = (10 \text{ mA})(10 \text{ k}\Omega) = 100 \text{ V}$$

$$e) I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{V_C}{2\pi f_p L} = \frac{100 \text{ V}}{2\pi(5,03 \text{ kHz})(1 \text{ mH})}$$

$$= \frac{100 \text{ V}}{31,6 \Omega} = 3,16 \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{100 \text{ V}}{31,6 \Omega} = 3,16 \text{ A} (= Q_p I)$$

O Exemplo 20.6, acima, demonstra a influência de R_s na análise de circuitos ressonantes em paralelo. A impedância da fonte é o único fator que limita a impedância de entrada e o valor de V_C .

EXEMPLO 20.7

Para o circuito ressonante em paralelo, visto na Figura 20.33, com $R_s = \infty \Omega$:

- Determine f_s, f_m e f_p e compare seus valores.
- Calcule a impedância máxima e a amplitude da tensão V_C na frequência f_m .
- Determine o fator de qualidade Q_p .
- Calcule a largura de banda.
- Compare os resultados acima com os obtidos usando as equações aproximadas válidas para $Q_i \geq 10$.

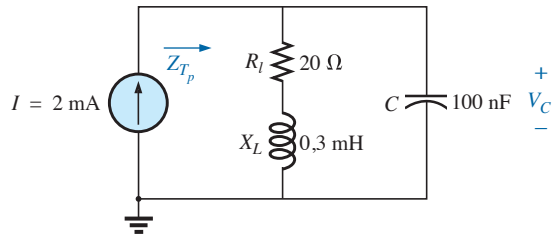


Figura 20.33 Exemplo 20.7.

Soluções:

$$a) f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(0,3 \text{ mH})(100 \text{ nF})}} = 29,06 \text{ kHz}$$

$$f_m = f_s \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left[\frac{R_l^2 C}{L} \right]}$$

$$= (29,06 \text{ kHz}) \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left[\frac{(20 \Omega)^2 (100 \text{ nF})}{0,3 \text{ mH}} \right]}$$

$$= 25,58 \text{ kHz}$$

$$f_p = f_s \sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}}$$

$$= (29,06 \text{ kHz}) \sqrt{1 - \left[\frac{(20 \Omega)^2 (100 \text{ nF})}{0,3 \text{ mH}} \right]}$$

$$= 27,06 \text{ kHz}$$

As frequências f_m e f_p são menores que f_s , como previsto. Além disso, f_m está mais próximo de f_s do que de f_p , também conforme previsto. f_m está cerca de 0,5 kHz abaixo de f_s , enquanto f_p está cerca de 2 kHz abaixo de f_s . As diferenças entre f_s, f_m e f_p sugerem um circuito de baixo Q .

$$b) Z_{T_m} = (R_l + jX_L) \parallel -jX_C \text{ a } f = f_m$$

$$X_L = 2\pi f_m L = 2\pi(28,58 \text{ kHz})(0,3 \text{ mH}) = 53,87 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_m C} = \frac{1}{2\pi(28,58 \text{ kHz})(100 \text{ nF})} = 55,69 \Omega$$

$$R_l + jX_L = 20 \Omega + j 53,87 \Omega = 57,46 \Omega \angle 69,63^\circ$$

$$Z_{T_m} = \frac{(57,46 \Omega \angle 69,63^\circ)(55,69 \Omega \angle -90^\circ)}{20 \Omega + j 53,87 \Omega - j 55,69 \Omega} = 159,34 \Omega \angle -15,17^\circ$$

$$V_{C_{\text{máx}}} = IZ_{T_m} = (2 \text{ mA})(159,34 \Omega) = 318,68 \text{ mV}$$

$$c) R_s = \infty \Omega; \text{ portanto,}$$

$$Q_p = \frac{R_s \parallel R_p}{X_{L_p}} = \frac{R_p}{X_{L_p}} = Q_l = \frac{X_L}{R_l} = \frac{2\pi(27,06 \text{ kHz})(0,3 \text{ mH})}{20 \Omega} = \frac{51 \Omega}{20 \Omega} = 2,55$$

O baixo valor de Q confirma a conclusão do item (a). As diferenças entre f_s , f_m e f_p seriam bem menores em um circuito de alto Q .

d) $BW = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{27,06 \text{ kHz}}{2,55} = 10,61 \text{ kHz}$

e) Para $Q_l \geq 10$ $f_m = f_p = f_s = 29,06 \text{ kHz}$

$$Q_p = Q_l = \frac{2\pi f_s L}{R_l} = \frac{2\pi(29,06 \text{ kHz})(0,3 \text{ mH})}{20 \Omega} = 2,74$$

(em vez de 2,55, como no item (c))

$$Z_{T_p} = Q_l^2 R_l = (2,74)^2 \cdot 20 \Omega = 150,15 \Omega \angle 0^\circ$$

(em vez de $159,34 \Omega \angle -15,17^\circ$, como no item (b))

$$V_{C_{\max}} = I Z_{T_p} = (2 \text{ mA})(150,15 \Omega) = 300,3 \text{ mV}$$

(em vez de 318,68 mV, como no item (b))

$$BW = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{29,06 \text{ kHz}}{2,74} = 10,61 \text{ kHz}$$

(em vez de 10,61 kHz, como no item (d))

Os resultados revelam que, mesmo em um sistema com um valor de Q relativamente pequeno, as soluções aproximadas não diferem muito das soluções exatas. A maior diferença está entre f_s e f_p (7 por cento, aproximadamente), sendo a diferença entre f_s e f_m menor do que 2%. Nas próximas análises, ao usarmos o valor de f_s para calcular Q_l , teremos certamente uma medida do valor de Q_l que poderá ser usada para determinar se as equações aproximadas são adequadas.

EXEMPLO 20.8

Dado o circuito visto na Figura 20.34, conhecendo o valor de f_p :

- Determine Q_l .
- Determine R_p .
- Calcule Z_{T_p} .
- Calcule C na ressonância.
- Determine Q_p .
- Calcule a BW e as frequências de corte.

Soluções:

a) $Q_l = \frac{X_L}{R_l} = \frac{2\pi f_p L}{R_l} = \frac{2\pi(0,04 \text{ MHz})(1 \text{ mH})}{10 \Omega} = 25,12$

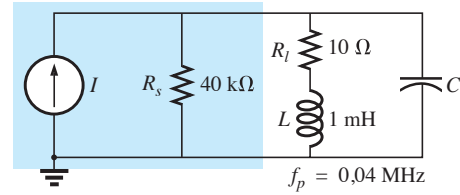


Figura 20.34 Exemplo 20.8.

b) $Q_l \geq 10$. Portanto,

$$R_p \cong Q_l^2 R_l = (25,12)^2 (10 \Omega) = 6,31 \text{ k}\Omega$$

c) $Z_{T_p} = R_s \parallel R_p = 40 \text{ k}\Omega \parallel 6,31 \text{ k}\Omega = 5,45 \text{ k}\Omega$

d) $Q_l \geq 10$. Portanto,

$$f_p \cong \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

e) $C = \frac{1}{4\pi^2 f_p^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 (0,04 \text{ MHz})^2 (1 \text{ mH})} = 15,83 \text{ nF}$

e) $Q_l \geq 10$. Portanto,

$$Q_p = \frac{Z_{T_p}}{X_L} = \frac{R_s \parallel Q_l^2 R_l}{2\pi f_p L} = \frac{5,45 \text{ k}\Omega}{2\pi(0,04 \text{ MHz})(1 \text{ mH})} = 21,68$$

f) $BW = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{0,04 \text{ MHz}}{21,68} = 1,85 \text{ kHz}$

$$f_l = \frac{1}{4\pi C} \left[-\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right] = \frac{1}{4\pi(15,9 \text{ nF})} \left[-\frac{1}{5,45 \text{ k}\Omega} + \sqrt{\frac{1}{(5,45 \text{ k}\Omega)^2} + \frac{4(15,9 \text{ nF})}{1 \text{ mH}}} \right]$$

$$= 5,005 \times 10^6 [-183,486 \times 10^{-6} + 7,977 \times 10^{-3}]$$

$$= 5,005 \times 10^6 [7,794 \times 10^{-3}]$$

$$= 39 \text{ kHz}$$

$$f_2 = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right]$$

$$= 5,005 \times 10^6 [183,486 \times 10^{-6} + 7,977 \times 10^{-3}]$$

$$= 5,005 \times 10^6 [8,160 \times 10^{-3}]$$

$$= 40,84 \text{ kHz}$$

Observe que $f_2 - f_1 = 40,84 \text{ kHz} - 39 \text{ kHz} = 1,84 \text{ kHz}$, confirmando o valor que calculamos acima para a largura de banda. Observe também que a largura de banda não é simétrica em relação à frequência de ressonância, estando 1 kHz abaixo de f_p e 840 Hz acima.

EXEMPLO 20.9

O circuito equivalente para a configuração do transistor mostrado na Figura 20.35 é visto na Figura 20.36.

- a) Determine f_p .
- b) Determine Q_p .
- c) Calcule BW .
- d) Calcule a tensão V_p na ressonância.
- e) Trace a curva de V_C em função da frequência.

Soluções:

a) $f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(5 \text{ mH})(50 \text{ pF})}}$
 $= 318,31 \text{ kHz}$

$X_L = 2\pi f_s L = 2\pi(318,31 \text{ kHz})(5 \text{ mH}) = 10 \text{ k}\Omega$

$Q_l = \frac{X_L}{R_l} = \frac{10 \text{ k}\Omega}{100 \text{ k}\Omega} = 100 > 10$

Portanto, $f_p = f_s = \mathbf{318,31 \text{ kHz}}$. Usando a Equação 20.31, teríamos o resultado $\cong 318,5 \text{ kHz}$.

b) $Q_p = \frac{R_s \parallel R_p}{X_L}$
 $R_p = Q_l^2 R_l = (100)^2 100 \Omega = 1 \text{ M}\Omega$
 $Q_p = \frac{50 \text{ k}\Omega \parallel 1 \text{ M}\Omega}{10 \text{ k}\Omega} = \frac{47,62 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega} = \mathbf{4,76}$

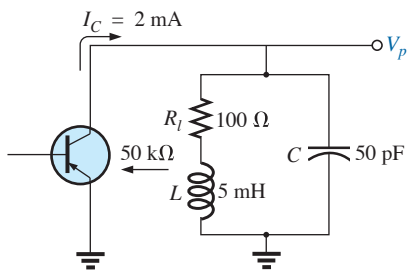


Figura 20.35 Exemplo 20.9.

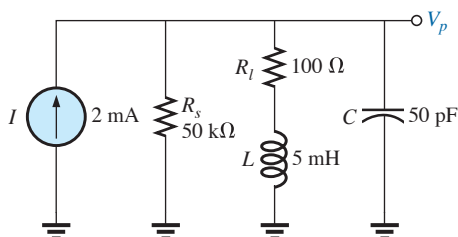


Figura 20.36 Circuito equivalente do circuito transistorizado visto na Figura 20.35.

Note a queda no valor de $Q_l = 100$ para $Q_p = 4,76$ devido a R_s .

c) $BW = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{318,31 \text{ kHz}}{4,76} = \mathbf{66,87 \text{ kHz}}$

Por outro lado,

$$BW = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R_l}{L} + \frac{1}{R_s C} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{100 \Omega}{5 \text{ mH}} + \frac{1}{(50 \text{ k}\Omega)(50 \text{ pF})} \right]$$

$$= \mathbf{66,85 \text{ kHz}}$$

resultado semelhante ao anterior.

d) $V_p = IZ_{T_p} = (2 \text{ mA})(R_s \parallel R_p) = (2 \text{ mA})(47,62 \text{ k})$
 $= \mathbf{95,24 \text{ V}}$

e) Veja a Figura 20.37.

EXEMPLO 20.10

Repita o Exemplo 20.9 ignorando os efeitos de R_s e compare os resultados.

Soluções:

f_p é a mesma, $\mathbf{318,31 \text{ kHz}}$.

Para $R_s = \infty \Omega$,

$Q_p = Q_l = \mathbf{100}$ (em vez de 4,76)

c) $BW = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{318,31 \text{ kHz}}{100} = \mathbf{3,18 \text{ kHz}}$

(em vez de 66,87 kHz)

d) $Z_{T_p} = R_p = 1 \text{ M}\Omega$ (em vez de 47,62 k Ω)

$V_p = IZ_{T_p} = (2 \text{ mA})(1 \text{ M}\Omega) = \mathbf{2000 \text{ V}}$

(em vez de 95,24 V)

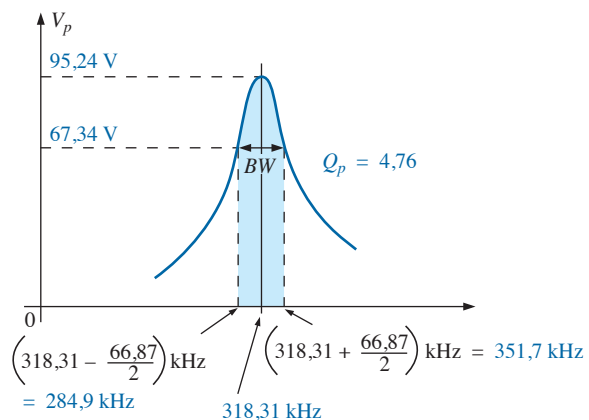


Figura 20.37 Curva de ressonância para o circuito visto na Figura 20.36.

Os resultados obtidos revelam claramente que a resistência da fonte pode ter uma influência considerável nas características de resposta de um circuito ressonante em paralelo.

EXEMPLO 20.11

Projete um circuito ressonante em paralelo que possua a curva de resposta mostrada na Figura 20.38 usando um indutor de 1 mH e 10 Ω e uma fonte de corrente com uma resistência interna de 40 k Ω .

Soluções:

$$BW = \frac{f_p}{Q_p}$$

Portanto,

$$Q_p = \frac{f_p}{BW} = \frac{50.000 \text{ Hz}}{2500 \text{ Hz}} = 20$$

$$X_L = 2\pi f_p L = 2\pi(50 \text{ kHz})(1 \text{ mH}) = 314 \Omega$$

$$e \quad Q_l = \frac{X_L}{R_l} = \frac{314 \Omega}{10 \Omega} = 31,4$$

$$R_p = Q_l^2 R = (31,4)^2(10 \Omega) = 9859,6 \Omega$$

$$Q_p = \frac{R}{X_L} = \frac{R_s \parallel 9859,6 \Omega}{314 \Omega} = 20$$

(obtido anteriormente)

$$\text{de maneira que } \frac{(R_s)(9859,6)}{R_s + 9859,6} = 6280$$

$$\text{resultando em } R_s = 17,298 \text{ k}\Omega$$

Entretanto, a fonte tem uma resistência de 40 k Ω . Precisamos, assim, acrescentar em paralelo com a fonte um resistor (R') que reduza essa resistência para aproximadamente 17,298 k Ω . Ou seja,

$$\frac{(40 \text{ k}\Omega)(R')}{40 \text{ k}\Omega + R'} = 17,298 \text{ k}\Omega$$

Determinando o valor de R' , temos:

$$R' = 30,48 \text{ k}\Omega$$

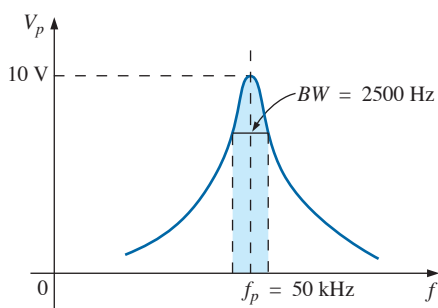


Figura 20.38 Exemplo 20.11.

O valor comercial mais próximo é 30 k Ω . Na ressonância, $X_L = X_C$, e:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_p C}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_p X_C} = \frac{1}{2\pi(50 \text{ kHz})(314 \Omega)}$$

e $C \cong 0,01 \mu\text{F}$ (disponível comercialmente)

$$\begin{aligned} Z_{T_p} &= R_s \parallel Q_l^2 R_l \\ &= 17,298 \text{ k}\Omega \parallel 9859,6 \Omega \\ &= 6,28 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

com $V_p = I Z_{T_p}$

$$e \quad I = \frac{V_p}{Z_{T_p}} = \frac{10 \text{ V}}{6,28 \text{ k}\Omega} \cong 1,6 \text{ mA}$$

O circuito aparece na Figura 20.39.

20.13 APLICAÇÕES

Ressonância parasita

A ressonância parasita, assim como a capacitância e a indutância parasitas e os valores indesejados de resistência, pode acontecer em situações inesperadas, podendo afetar seriamente o funcionamento de um sistema. Tudo o que é necessário para produzir uma ressonância parasita seria, por exemplo, um certo valor de capacitância introduzido por fios em paralelo ou pelas trilhas de cobre em uma placa de circuito impresso, ou simplesmente por duas superfícies condutoras em paralelo com uma carga residual e valores de indutância associados com qualquer condutor ou componente, como um cabeçote de um gravador de fita, transformadores, entre outros, que constituem elementos necessários para os efeitos de ressonância. De fato, esse efeito é muito comum em um gravador de fita cassete. O cabeçote de gravação/reprodução é uma bobina que pode funcionar como um indutor e uma antena. Combinando esse fator com a capacitância parasita e a capacitância real do circuito, temos um circuito de sintonia e, com a adição de um diodo, o gravador de fita pode desempenhar a função de um receptor AM (rádio AM). À medida que se

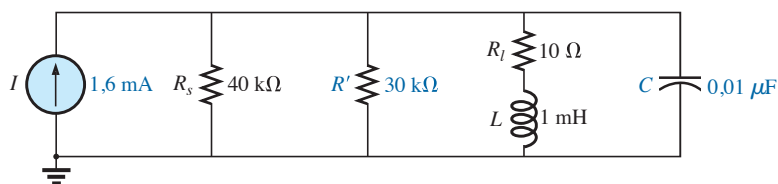


Figura 20.39 Circuito projetado para atender aos critérios apresentados na Figura 20.38.

faz o gráfico da resposta em frequência de qualquer transformador, normalmente é encontrada uma região na qual a resposta tem um efeito máximo (veja a Figura 25.21). Essa região de pico ocorre somente devido à indutância das bobinas do transformador e da capacitância parasita entre os fios.

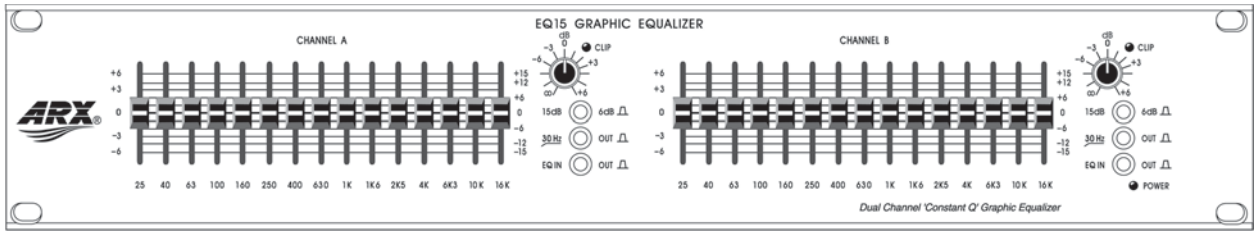
Em geral, todas as vezes que se vê um efeito de pico inesperado na resposta em frequência de um elemento ou sistema, ele normalmente é provocado por uma condição de ressonância. Se a resposta tem efeito prejudicial no funcionamento geral do sistema, faz-se necessário redimensionar o projeto ou incluir um filtro para bloquear as frequências que resultam na condição de ressonância. É claro que, quando se acrescenta um filtro constituído de indutores e/ou capacitores, é necessário ter o cuidado de não inserir uma condição de ressonância inesperada. Isso é um problema que só pode ser considerado adequadamente ao se construir o sistema e ao submetê-lo aos testes.

Equalizadores gráficos e paramétricos

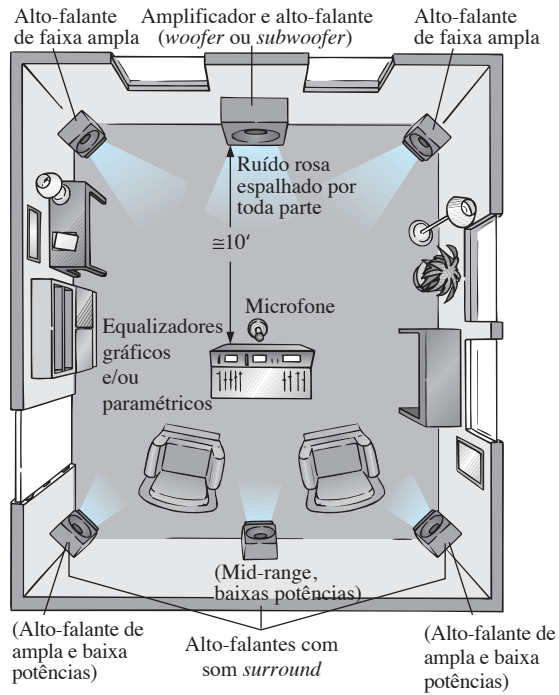
Já notamos, uma vez ou outra, que a música que ouvimos em um salão de concerto tem um som bem diferente da que ouvimos em casa. Mesmo após termos verificado as especificações dos alto-falantes e dos amplificadores e identificado que ambos são quase perfeitos (e mais caros do que o que poderíamos comprar), o som ainda não é o que deveria ser. Em geral, estamos sujeitos às influências que o ambiente tem sobre as ondas sonoras. Alguns problemas típicos são paredes ou pisos (pedras ou cimento) que refletem o som e fazem com que a sua intensidade, em frequências altas, seja maior. Cortinas e tapetes, por outro lado, absorvem as frequências altas. O formato da sala e o posicionamento dos alto-falantes e dos móveis também influenciam no som que chega aos nossos ouvidos. Outro critério é o eco ou a reflexão do som que ocorre no ambiente ao redor. Salões de concerto são projetados cuidadosamente com tetos em forma de abóbada e paredes curvas para permitir certa quantidade de eco. Mesmo as características de temperatura e umidade do ar afetam a qualidade do som. Na maioria dos casos, é certamente impossível modificar o ambiente de som de maneira que ele se torne igual a um salão de concerto, mas com o uso adequado dos sistemas eletrônicos pode-se obter uma resposta que tenha todas as qualidades esperadas para uma sala de som em casa.

Para obter um sistema de som de qualidade, diversos procedimentos têm que ser seguidos: *caracterização e retardo digital (som surround) e seleção e posicionamento de alto-falantes e amplificadores adequados*. A caracterização é o processo pelo qual se faz a verificação minuciosa da absorção de som de um ambiente e se determina a resposta em frequência. Um *equalizador gráfico*, como o que

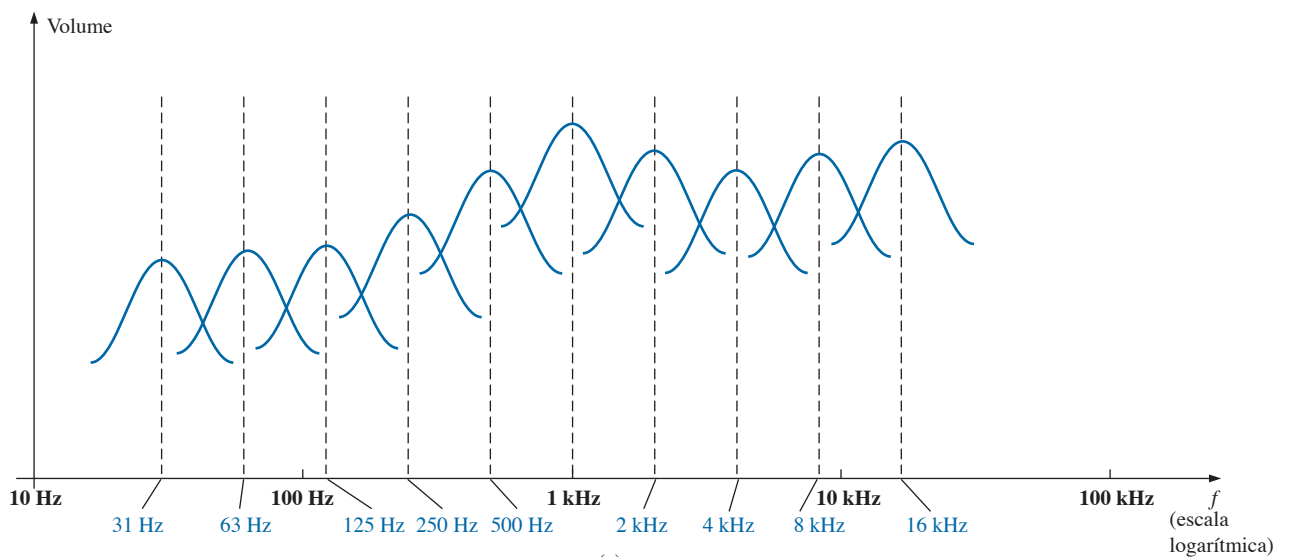
é mostrado na Figura 20.40(a), é usado para determinar a resposta ‘plana’ (uniforme) para toda a faixa de frequência. Em outras palavras, faz-se com que o ambiente se comporte como se todas as frequências fossem recebidas com a mesma intensidade na área em que o som é distribuído. Por exemplo, se o ambiente for totalmente carpetado com as dobras das cortinas dispostas harmoniosamente, haverá uma grande absorção de frequências altas, sendo necessário, assim, que elas tenham uma amplificação maior para equiparar o nível do som com o das frequências médias e baixas. Para caracterizar uma típica sala retangular, pode-se implementar uma disposição de equipamentos e móveis como a que é mostrada na Figura 20.40(b). O amplificador e os alto-falantes foram posicionados no centro de uma parede, com outros alto-falantes nos cantos da sala, voltados para o público. Um microfone foi colocado na área de recepção a uma distância de cerca de três metros do amplificador e a uma distância igual dos outros dois alto-falantes. Um *ruído rosa* será então enviado a partir de um analisador de espectro (normalmente é uma parte integrante de um equalizador gráfico) para o amplificador e para os alto-falantes. O ruído rosa é na realidade um sinal de onda quadrada cujas amplitude e frequência podem ser controladas. Foi escolhido um sinal de onda quadrada porque a decomposição de Fourier de um sinal de onda quadrada resulta em uma ampla faixa de frequência para o sistema verificar. Será visto no Capítulo 24 que uma onda quadrada pode ser construída a partir de uma série infinita de senoides de diferentes frequências. Uma vez estabelecido um volume adequado para o ruído rosa, o analisador de espectro pode ser usado para ajustar a resposta de cada banda com o intuito de estabelecer a resposta uniforme desejada. As frequências centrais de cada ajuste deslizante do equalizador gráfico, visto na Figura 20.40(a), são mostradas na Figura 20.40(c), juntamente com a resposta em frequência de várias outras adjacentes que estão igualmente espaçadas em uma escala logarítmica. Note que cada frequência central é na realidade a frequência de ressonância da faixa em questão. O projeto é feito de tal maneira que cada ajuste deslizante possa controlar o volume associado com aquela frequência, porém, a largura de banda e a resposta em frequência permanecem bastante constantes. Um bom analisador de espectro tem as faixas de ajustes dispostas em uma escala em decibel (dB) (o decibel será discutido detalhadamente no Capítulo 21). A escala em decibel estabelece uma escala para comparação com os níveis de áudio. Para uma audição normal, é necessária, geralmente, uma variação de 3 dB para que uma variação no áudio seja percebida pelo ouvido humano. Para níveis baixos de áudio, uma variação de 2 dB pode ser perceptível, porém, para um som alto, provavelmente será necessária uma variação de 4 dB para que seja notado.



(a)



(b)



(c)

Figura 20.40 (a) Equalizador gráfico ‘Constant Q ’ de 15 bandas e duplo canal (cortesia da ARX Systems); (b) posicionamento dos equipamentos de som; (c) resposta em frequência.

Essas não são leis rígidas, mas, sim, regras práticas usadas por técnicos de áudio. Para a sala em questão, o conjunto de ajustes pode ser como aquele mostrado na Figura 20.40(c). Uma vez feitos os ajustes, eles não deverão ser alterados. Uma resposta uniforme foi estabelecida para a sala para toda a faixa de áudio, de maneira que qualquer som ou tipo de música esteja dentro dela.

Um *equalizador paramétrico*, tal como o que aparece na Figura 20.41, é similar a um *equalizador gráfico*; porém, em vez dos controles separados para as faixas de frequências individuais, ele usa três controles básicos que abrangem três ou quatro faixas de frequências. Os controles típicos — *ganho*, *frequência central* e *largura de banda* — normalmente estão disponíveis para as *frequências baixas, médias e altas*. Cada um é essencialmente um controle independente; ou seja, ao ajustar um deles, os outros dois não são afetados. No caso do equalizador paramétrico, visto na Figura 20.41, cada um dos seis canais tem uma chave de controle de frequência que, em conjunto com a chave $f \times 10$, fornece uma faixa com frequência central de 40 Hz até 16 kHz. Esse equalizador tem controles para largura de banda (Q) a partir de 3 oitavas até 1/20 de oitava, faixa de ganho de ± 18 dB e reforçador. Alguns gostam de se referir a um equalizador paramétrico como um *controle sofisticado de tom* e usá-lo para elevar a qualidade do som após a resposta uniforme ter sido estabelecida pelo equalizador gráfico. O efeito alcançado com um botão de controle de tom padrão é algumas vezes denominado ‘entediante’ se comparado ao efeito estabelecido por um bom equalizador paramétrico, principalmente porque o primeiro pode controlar apenas o volume, não a largura de banda ou a frequência central. Em geral, os equalizadores gráficos estabelecem uma importante *resposta uniforme*, enquanto os paramétricos são ajustados para proporcionar o *tipo* e a *qualidade* do som que queremos escutar. Podemos ‘excluir’ as frequências que incomodam e remover o ‘assobio’ do tape e o ‘agudo’ frequentemente associado aos CDs.

Uma das características das salas de concertos que é mais difícil de imitar é a sensação de som perfeito que elas proporcionam. Nas salas de concertos temos um som que provém diretamente dos instrumentos e da reflexão dele nas paredes e nos tetos em forma de abóbada, que foram cuidadosa e explicitamente projetados para essa finalidade. O resultado de qualquer reflexão possui um

atraso nas ondas sonoras que chegam aos ouvidos, criando o efeito de som perfeito. Em função do atraso digital, os alto-falantes podem ser posicionados atrás e ao lado do ouvinte para estabelecer o efeito sonoro *surround*. Em geral, os alto-falantes que reproduzem o som com atraso são de baixa potência, sendo usados, normalmente, os alto-falantes de 20 W em sistemas de 100 W. A resposta de eco é um dos motivos que frequentemente leva as pessoas a preferirem um som estéreo alto a um normal. O som estéreo mais alto proporciona mais eco e reflexão nas paredes, proporcionando um pouco do efeito de perfeição de som dos salões de concerto.

Pode-se dizer que qualquer sistema constituído de componentes de qualidade, equalizadores gráfico e paramétrico e som *surround* tem todos os elementos necessários para uma reprodução, com qualidade, dos efeitos obtidos nos salões de concertos.

20.14 ANÁLISE COMPUTACIONAL

PSpice

Ressonância de circuitos em série. Este capítulo fornece uma excelente oportunidade para demonstrar o que os programas de computador podem fazer por nós. Imagine ter de fazer um gráfico com uma curva de ressonância detalhada efetuando, para cada frequência, todos os cálculos necessários. Para cada frequência, as reatâncias dos elementos indutivos e capacitivos variam, e as operações com fasores devem ser repetidas — uma tarefa longa e árdua. Entretanto, com o uso do PSpice, leva-se alguns minutos para desenhar o circuito e estabelecer a simulação desejada obtendo-se um gráfico detalhado em poucos segundos, contendo pontos a cada microssegundo!

Pela primeira vez, o eixo horizontal será usado no domínio da frequência em vez de ser usado no domínio do tempo, como nos gráficos traçados anteriormente. No caso do circuito ressonante em série visto na Figura 20.42, a amplitude da fonte foi escolhida de maneira a gerar uma corrente máxima $I = 400 \text{ mV}/40 \Omega = 10 \text{ mA}$ na ressonância, sendo que os elementos reativos proporcionam frequência de ressonância de

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(30 \text{ mH})(0,1 \mu\text{F})}} \cong 2,91 \text{ kHz}$$

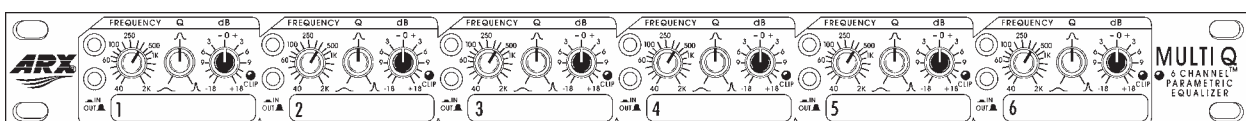


Figura 20.41 Equalizador paramétrico de seis canais. (Cortesia da ARX Systems.)

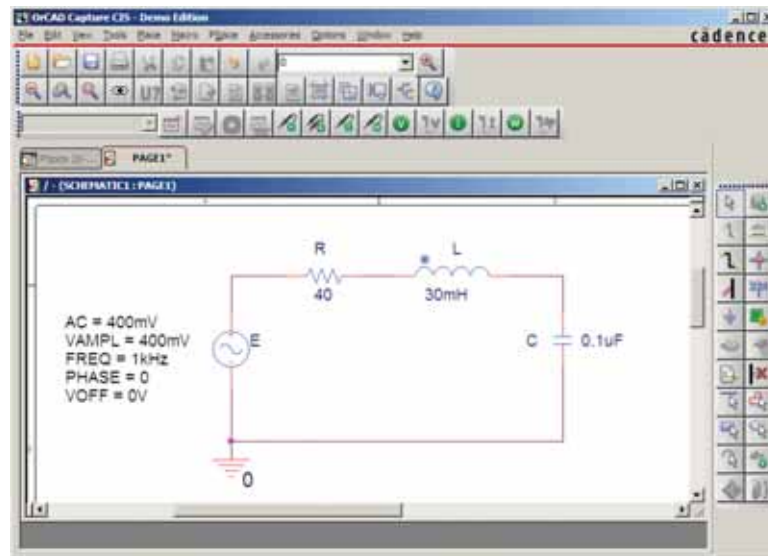


Figura 20.42 Circuito ressonante em série a ser analisado usando o PSpice.

O fator de qualidade é:

$$Q_l = \frac{X_L}{R_l} = \frac{546,64 \Omega}{40 \Omega} \cong 13,7$$

que é relativamente alto e nos dá uma resposta bastante nítida.

A largura de banda é:

$$BW = \frac{f_s}{Q_l} = \frac{2,91 \text{ kHz}}{13,7} \cong 212 \text{ Hz}$$

que será comprovada usando a opção de cursores.

No caso da fonte CA, escolha **VSIN** novamente. Todos os parâmetros foram ajustados por meio de um duplo clique no símbolo da fonte seguido da inserção dos valores na caixa de diálogo **Property Editor**. Para cada parâmetro, foi selecionada a opção **Name and Value**, obtida ao acionar o botão **Display**, seguido do botão **Apply**, que é acionado antes de fechar a caixa de diálogo.

Na caixa de diálogo **Simulation Settings**, foi selecionada a opção **AC Sweep/Noise**, e **Start Frequency** foi ajustado em 1 kHz, **End Frequency**, em 10 kHz e **Points/Decade**, em 10.000. Os valores default para **Logarithmic scale** e **Decade** foram mantidos. O valor de 10.000 para **Points/Decade** foi escolhido para garantir um número adequado de pontos de dados próximo do valor de pico. Quando a tela **SCHEMATIC1**, vista na Figura 20.43, aparecer, use a sequência **Trace-Add Trace-I(R)-OK** para obter o gráfico logarítmico cujo valor de pico estará um pouco à esquerda de 3 kHz. O espaçamento entre as linhas de grade no **X-axis** deve ser aumentado, assim deve-se implementar **Plot-Axis Settings-X Grid-unable Automatic-Spacing-Log-0.1-OK**. Em seguida, selecione o ícone **Toggle Cursor** e, com o botão direito do mouse, mova o cursor da direita o mais próximo possível de 7,07

mA (0,707 do valor de pico para definir a largura de banda) para obter **A1** com uma frequência de 2,80 kHz para um valor de corrente de 7,03 mA — o melhor valor que se pode obter com 10.000 pontos de dados para cada dez. Agora, clique no cursor da esquerda e o coloque o mais próximo possível do mesmo valor de corrente. O resultado obtido é 3,01 kHz para uma corrente de 7,19 mA (**A2**). Os cursores foram posicionados conforme descrito para se obter uma resposta positiva relativa à diferença (dif) para as duas grandezas, conforme mostra a terceira linha da caixa **Probe Cursor**. O resultado de 209,96 Hz está bastante próximo do valor calculado, que é 212 Hz.

Ressonância de circuitos em paralelo. Agora, vamos investigar o circuito ressonante paralelo visto na Figura 20.33 e comparar seus resultados com aqueles obtidos usando a solução manual. O circuito é mostrado na Figura 20.44 usando a fonte de tensão CA **ISRC**. Os seguintes valores foram ajustados em **Property Editor**: **DC** = 0 A, **AC** = 2 mA e **TRAN** = 0. O botão **Display** foi acionado seguido de **Do Not Display**, e **Start Frequency** foi ajustado em 10 kHz, pois sabemos que a ressonância do circuito acontece em torno de 30 kHz. O parâmetro **End Frequency** foi ajustado em 100 kHz para que possamos ver os resultados da primeira simulação. **Points/Decade** foi ajustado em 10.000 para garantir um bom número de pontos de dados na região de pico. Após a simulação, o uso da sequência **Trace-Add Trace-V(C:1)-OK** resulta no gráfico mostrado na Figura 20.45, que apresenta uma frequência de ressonância em torno de 30 kHz. A faixa selecionada se mostrou adequada, mas o gráfico inicial precisa de mais linhas de grade no eixo *x*, e portanto a sequência **Plot-Axis Settings-X-Grid-unable Automatic-Spacing-Log-0.1-OK** foi usada para se obter uma linha de grade em intervalos de 10 kHz. Em seguida, o

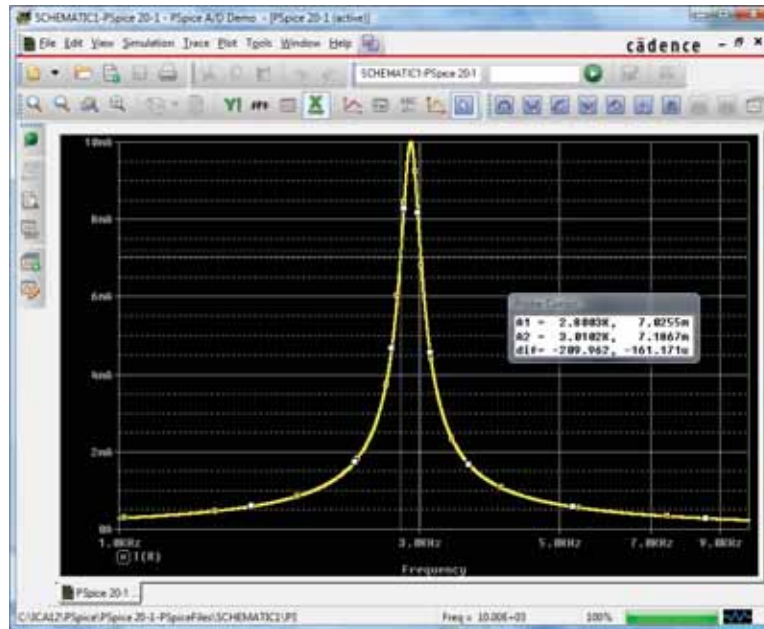


Figura 20.43 Curva de ressonância da corrente para o circuito visto na Figura 20.42.

ícone **Toggle Cursor** foi selecionado e o cursor ativado pelo botão esquerdo do mouse foi estabelecido na tela. O ícone **Cursor Peak** foi então escolhido para determinar o valor de pico da curva. O resultado foi **A1** = 319,45 mV em 28,96 kHz, que está muito próximo do valor calculado — 318,68 mV em 28,57 kHz para o valor máximo de V_C . A

largura de banda é definida para o valor de 0,707 (319,45 mV) = 225,85 mV. Usando o cursor ativado pelo botão direito do mouse, podemos ver que o valor mais próximo que podemos conseguir é 225,32 mV para 10.000 pontos de dados por década. A frequência resultante é 34,65 kHz, conforme mostra a caixa **Probe Cursor** na Figura 20.45.

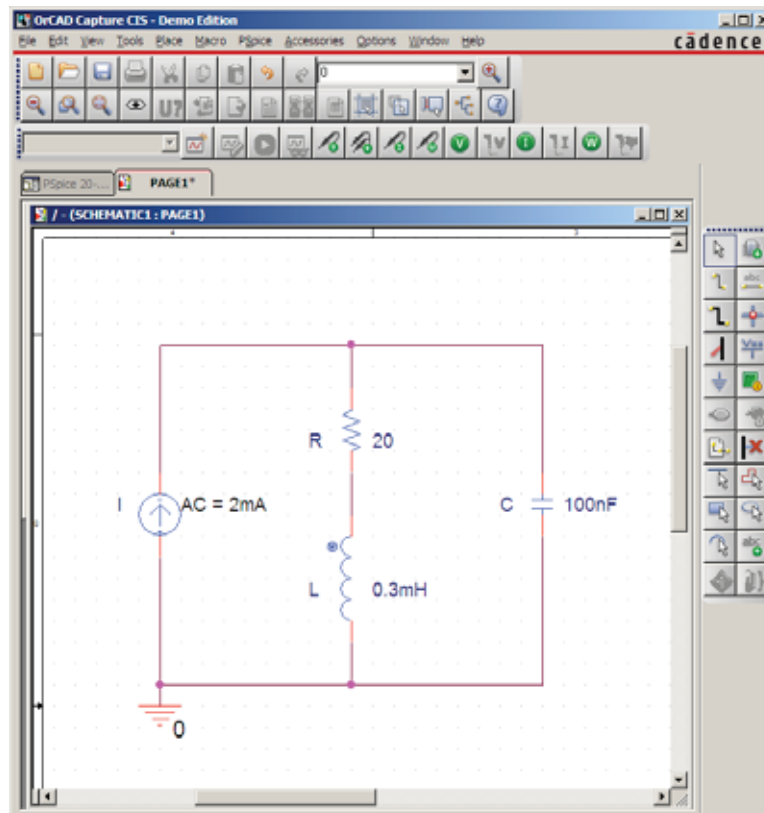


Figura 20.44 Circuito ressonante em paralelo a ser analisado usando o PSpice.

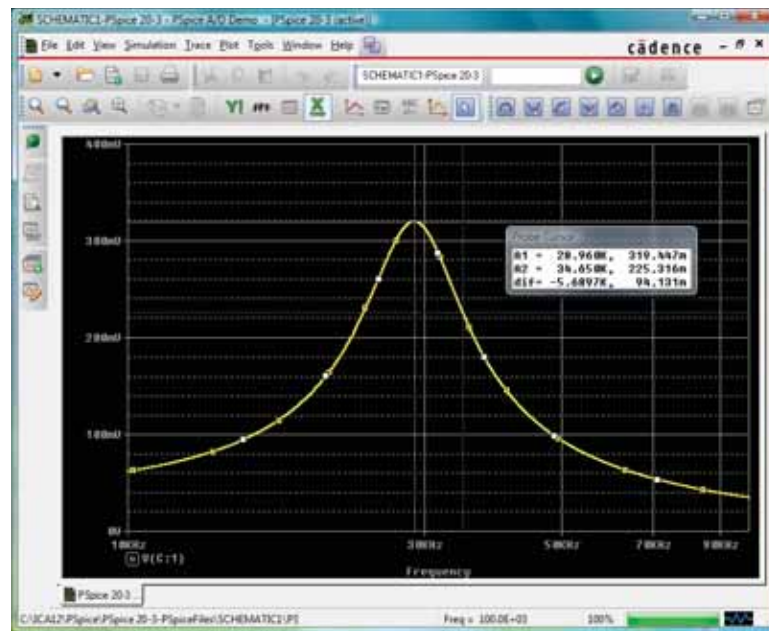


Figura 20.45 Curva de ressonância da tensão no capacitor vista na Figura 20.44.

Agora podemos usar o cursor ativado pelo botão esquerdo do mouse para determinar o mesmo valor à esquerda do valor de pico, de maneira que podemos determinar a largura de banda. O valor mais próximo de 225,85 mV em que esse cursor pode ser posicionado é 224,96 mV na frequência de 23,97 kHz. O valor da largura de banda que aparece é 10,68 kHz na caixa **Probe Cursor**, que está bem próximo da solução manual que é 10,68 kHz no Exemplo 20.7.

Seria interessante observar agora o ângulo de fase da tensão no circuito paralelo para determinar a frequência em que o circuito se mostra resistivo e na qual o ângulo de fase é 0° . Primeiro use a sequência **Trace-Delete All Traces** e escolha **P(V(C:1))** seguido do botão **OK**. O resultado é o gráfico mostrado na Figura 20.46, revelando que o ângulo de fase está próximo de -90° em altas frequências, à medida que o elemento capacitivo, com o decréscimo de sua impedância, determina as características do circuito paralelo. Na frequência de 10 kHz, o elemento indutivo apresenta uma reatância menor que o elemento capacitivo, sendo que o circuito apresenta um ângulo de fase positivo. Usando a opção cursor, podemos movê-lo por meio do botão esquerdo do mouse ao longo do eixo horizontal, até que o ângulo de fase atinja o seu menor valor. De acordo com a Figura 20.46, o menor ângulo possível em função da quantidade de pontos determinada é 125,15 mgrauss = $0,13^\circ$, que, sem dúvida, está muito próximo de 0° . A frequência correspondente é 27,07 kHz, que é praticamente igual ao valor da solução manual, que é 27,05 kHz. Portanto, obviamente, a frequência na qual o ângulo de fase é

zero e a impedância total mostra-se resistiva é menor que a frequência na qual a tensão de saída é máxima.

Multisim

Os resultados do Exemplo 20.9 agora são confirmados usando o Multisim. O circuito na Figura 20.36 aparece, conforme mostra a Figura 20.47, após todos os elementos terem sido colocados, de acordo com os capítulos anteriores. A fonte de corrente é selecionada na caixa de diálogo **Select a Component** com a sequência **Family-SIGNAL_CURRENT_SOURCES**, seguida por **Component-AC_CURRENT**. Em particular, observe que a frequência atribuída à fonte de corrente CA de 2 mA é 100 kHz. Como temos alguma ideia de que a frequência de ressonância tem um valor de algumas centenas de quilohertz, parece apropriado que a frequência inicial para o gráfico comece em 100 kHz e se estenda para 1 MHz. Além disso, cuide para que a **AC Magnitude** seja definida como 2 mA na **Analysis Setup** dentro da caixa de diálogo **AC Current**. Lembre-se de que as tensões nodais numeradas são exibidas no circuito por meio de um clique do botão direito do mouse em qualquer lugar na tela, seguido por **Properties-Sheet Properties-Net Names-Show all-OK**. Os nós numerados são muito úteis quando se trata de selecionar traçados a serem vistos na tela.

Para a simulação, primeiro selecione a sequência **Simulate-Analyses-AC Analysis** para ver a caixa de diálogo **AC Analysis**. Defina a **Start frequency** em 100 kHz, a **Stop frequency** em 1 MHz, **Sweep type** em **Decade**, **Number of points per decade** em 1000 e a **Vertical scale** em **Linear**.

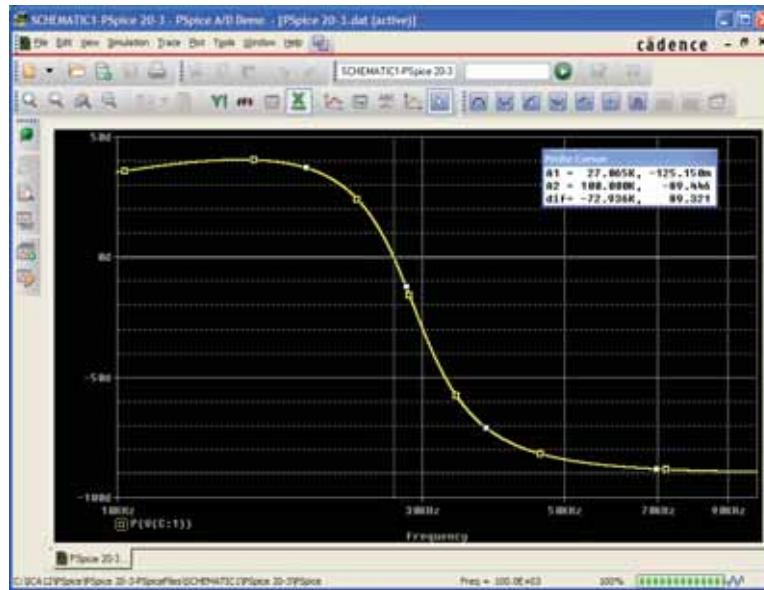


Figura 20.46 Gráfico da fase da tensão v_C para o circuito ressonante em paralelo visto na Figura 20.44.

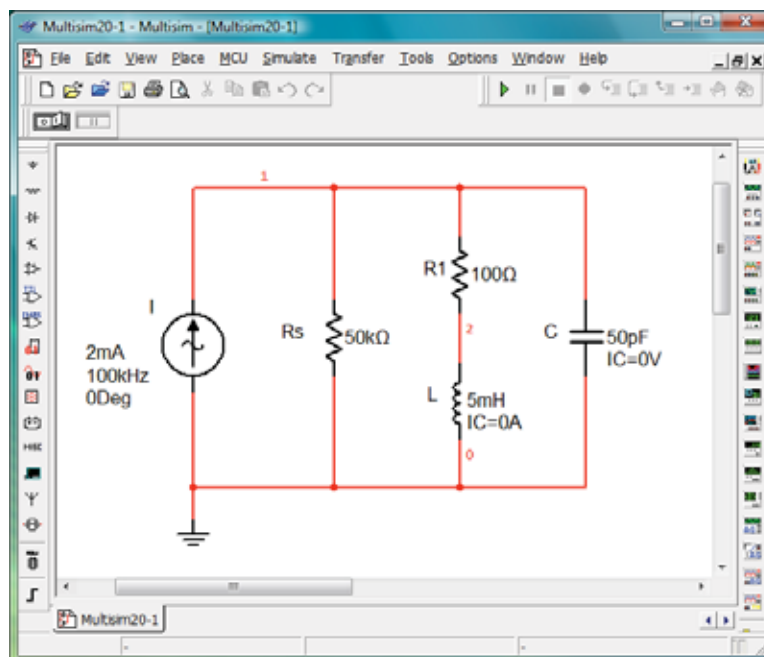


Figura 20.47 Uso do Multisim para confirmar os resultados do Exemplo 20.9.

Sob **Output variables**, selecione **V(1)** como **Variable for analysis** seguido por **Simulate** para executar o programa. Os resultados são os gráficos de magnitude e fase da Figura 20.48. Começando com o gráfico **Voltage**, selecione o botão **Show/Hide Grid**, o botão **Show/Hide Legend** e o botão **Show/Hide Cursors**. Pode-se notar imediatamente, sob a caixa de cursor **AC Analysis**, que o valor máximo é 95,24 V, e que o valor mínimo é 6,94 V. Movendo o cursor para perto de 95,24 V (**y1**), você encontrará a frequência de ressonância.

Como pode ser visto na caixa de diálogo de cursor do alto da Figura 20.48, isso é obtido em 318,23 kHz (**x1**). O outro cursor (azul) pode ser usado para definir a alta frequência de corte para a largura de banda, calculando primeiro o nível de 0,707 da tensão de saída. O resultado é $0,707(95,24 \text{ V}) = 67,33 \text{ V}$. O mais próximo que podemos chegar desse nível com o cursor é 67,57 V (**y2**), que define uma frequência de 353,55 kHz (**x2**). Se agora usarmos o cursor vermelho para encontrar o nível correspondente abaixo da frequência de

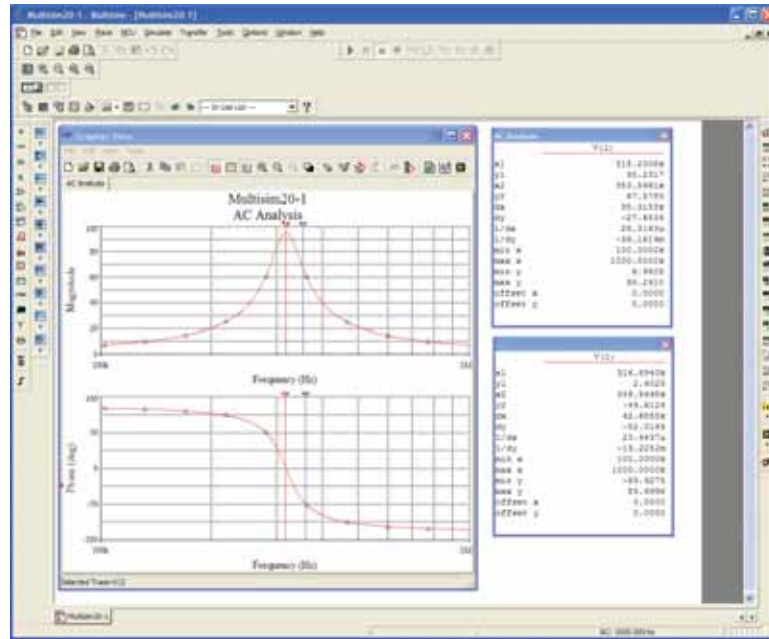


Figura 20.48 Gráficos de magnitude e fase para a tensão v_c do circuito visto na Figura 20.47.

ressonância, encontraremos um nível de 67,49 V (**y1**) para 287,08 kHz (**x1**). A largura de banda resultante é, portanto, $353,55 \text{ kHz} - 287,08 \text{ kHz} = 66,47 \text{ kHz}$.

Agora, podemos determinar a frequência de ressonância se definirmos a ressonância como aquela frequência que resulta em um ângulo de fase de 0° para a tensão de saída. Repetindo o processo descrito acima para o gráfico de fase, defina o cursor vermelho o mais próximo de 0° possível. O resultado é $2,4^\circ$ (**y1**) para 316,89 kHz (**x1**), revelando claramente que a frequência de ressonância definida pelo ângulo de fase é menor do que aquela definida pela tensão de pico. Entretanto, com uma Q , de cerca de 100, a diferença de 1,99 kHz não é significativa. Observe

também que, quando o segundo cursor foi definido em 359,55 kHz, o ângulo de fase de $-49,61^\circ$ está próximo dos 45° esperados na frequência de corte.

Mais uma vez, a solução do computador é uma combinação muito próxima da solução manual do Exemplo 20.9, com uma correspondência perfeita dos 95,24 V para o valor de pico e apenas uma pequena diferença na largura de banda com 66,87 kHz, no Exemplo 20.9, e 66,63 kHz, nesse caso. Para a alta frequência de corte, o computador gerou um resultado de 353,55 kHz, enquanto a solução teórica foi 351,7 kHz. Para a baixa frequência de corte, o computador respondeu com 287,08 kHz em comparação com uma solução teórica de 284 kHz.

PROBLEMAS

Seções 20.2 a 20.7 Ressonância em série

1. Determine as frequências de ressonância ω_s e f_s de um circuito em série com os seguintes parâmetros:
 - a) $R = 10 \ \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 16 \ \mu\text{F}$
 - b) $R = 300 \ \Omega$, $L = 0,51 \text{ H}$, $C = 0,16 \ \mu\text{F}$
 - c) $R = 20 \ \Omega$, $L = 0,27 \ \mu\text{H}$, $C = 7,5 \ \mu\text{F}$
2. Para o circuito em série visto na Figura 20.49:
 - a) Calcule o valor de X_C na ressonância.
 - b) Determine a impedância total do circuito na ressonância.
 - c) Calcule a intensidade da corrente I .
 - d) Calcule as tensões V_R , V_L e V_C na ressonância. Qual a relação entre V_L e V_C ? Como V_R se compara à tensão aplicada E ?

- e) Qual é o fator de qualidade do circuito? Trata-se de um circuito com um Q alto ou baixo?
- f) Qual a potência dissipada pelo circuito na ressonância?

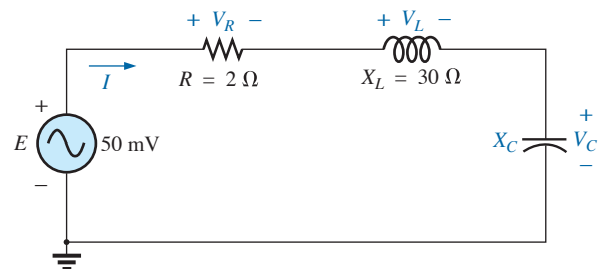


Figura 20.49 Problema 2.

3. Considerando o circuito em série visto na Figura 20.50:
 - a) Calcule o valor de X_L na ressonância.
 - b) Determine a intensidade da corrente I na ressonância.
 - c) Calcule as tensões V_R , V_L e V_C na ressonância e compare suas amplitudes.
 - d) Determine o fator de qualidade do circuito. Trata-se de um circuito de alto ou baixo Q ?
 - e) Se a frequência de ressonância é 5 kHz, determine os valores de L e C .
 - f) Calcule a largura de banda se a frequência de ressonância for 5 kHz.
 - g) Quais são as frequências de corte inferior e superior?
4. Considerando o circuito visto na Figura 20.51:
 - a) Calcule o valor de L em milihenries se a frequência de ressonância é 1.800 Hz.
 - b) Calcule X_L e X_C . Como esses valores podem ser comparados?
 - c) Determine a intensidade da corrente I_{rms} na ressonância.
 - d) Determine a potência dissipada pelo circuito na ressonância.
 - e) Qual a potência aparente fornecida ao sistema na ressonância?
 - f) Qual o fator de potência do circuito na ressonância?
 - g) Calcule o Q do circuito e a largura de banda resultante.
 - h) Determine as frequências de corte e calcule a potência dissipada pelo circuito nessas frequências.
5.
 - a) Determine a largura de banda de um circuito ressonante em série com uma frequência de ressonância de 6.000 Hz e um Q_s de 15.
 - b) Calcule as frequências de corte.
 - c) Se a resistência do circuito na ressonância é 3 W, quais os valores de X_L e X_C em ohms?
 - d) Qual a potência dissipada nas frequências de meia potência se a corrente máxima no circuito é 0,5 A?

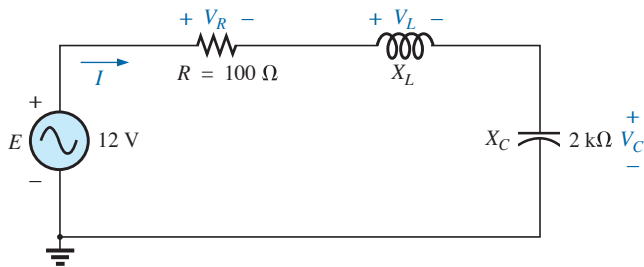


Figura 20.50 Problema 3.

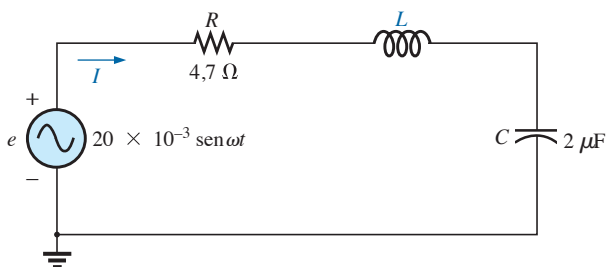


Figura 20.51 Problema 4.

6. Um circuito em série possui uma frequência de ressonância de 10 kHz. A resistência do circuito é 5 Ω, e X_C na ressonância é 200 Ω.
 - a) Determine a largura de banda.
 - b) Determine as frequências de corte.
 - c) Determine Q_s .
 - d) Se a tensão de entrada é 30 V $\angle 0^\circ$, determine as tensões no indutor e no capacitor em forma fasorial.
 - e) Encontre a potência dissipada na ressonância.
7.
 - a) A largura de banda de um circuito ressonante é 200 Hz. Se a frequência de ressonância é 2000 Hz, qual o valor de Q_s para o circuito?
 - b) Se $R = 2 \Omega$, qual o valor de X_L na ressonância?
 - c) Calcule o valor de L e C na ressonância.
 - d) Calcule as frequências de corte.
8. As frequências de corte de um circuito ressonante em série são 5.400 Hz e 6.000 Hz.
 - a) Calcule a largura de banda do circuito.
 - b) Se Q_s é 9,5, determine a frequência de ressonância do circuito.
 - c) Se a resistência do circuito é 2 Ω, determine os valores de X_L e X_C na ressonância.
 - d) Calcule os valores de L e C na ressonância.
- *9.
 - a) Projete um circuito ressonante em série com uma tensão de entrada de 5 V $\angle 0^\circ$ e as seguintes especificações:
 - Uma corrente máxima de 500 mA na ressonância.
 - Uma largura de banda de 120 Hz.
 - Uma frequência de ressonância de 8.400 Hz.
 - b) Determine os valores de L e C e as frequências de corte.
- *10. Projete um circuito ressonante em série para ter uma largura de banda de 400 Hz, usando um indutor com um Q_l de 20 e uma resistência de 2 Ω. Determine os valores de L e C e as frequências de corte.
- *11. Um circuito ressonante em série entra em ressonância quando $\omega_s = 2\pi \times 10^6$ rad/s e consome 20 W de uma fonte de 120 V na ressonância. Se a largura de banda relativa é 0,16:
 - a) determine a frequência de ressonância em hertz.
 - b) calcule a largura de banda em hertz.
 - c) determine os valores de R , L e C .
 - d) calcule a resistência do indutor se $Q_l = 80$.
- *12. Um circuito ressonante em série entra em ressonância na frequência de 1 MHz com uma largura de banda relativa de 0,2. Se o fator de qualidade do indutor na ressonância é 12,5 e sua indutância é 100 μH, determine:
 - a) a resistência da bobina.
 - b) a resistência adicional necessária para estabelecer a largura de banda relativa especificada.
 - c) o valor requerido da capacitância.

Seções 20.8 a 20.12 Ressonância em paralelo

13. Considerando o circuito ressonante em paralelo ‘ideal’ visto na Figura 20.52:
 - a) Determine a frequência de ressonância (f_p).
 - b) Calcule a tensão V_C na ressonância.
 - c) Determine as correntes I_L e I_C na ressonância.
 - d) Calcule Q_p .
14. Considerando o circuito ressonante em paralelo visto na Figura 20.53:
 - a) Calcule f_s .
 - b) Determine Q_l considerando $f = f_s$. É razoável usar as expressões aproximadas?

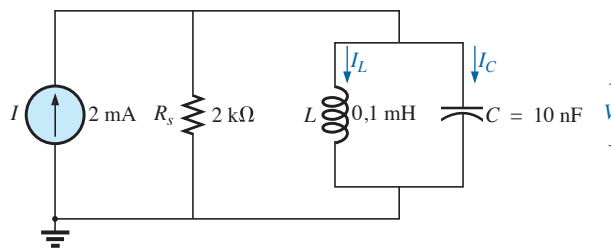


Figura 20.52 Problema 13.

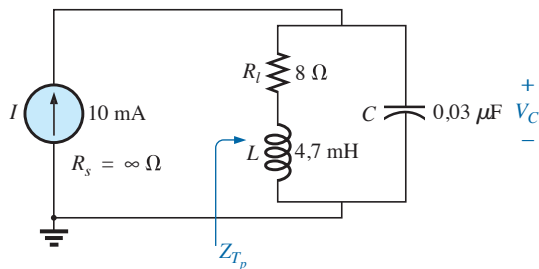


Figura 20.53 Problema 14.

- c) Determine f_p e f_m .
- d) Calcule X_L e X_C a partir de f_p . Compare as duas reatâncias.
- e) Determine a impedância total na ressonância (f_p).
- f) Calcule V_C na ressonância (f_p).
- g) Determine Q_p e a BW a partir de f_p .
- h) Calcule I_L e I_C em f_p .

*15. O circuito da Figura 20.54 tem uma fonte com uma resistência interna de 1 kW, uma tensão de 120 V e uma grande faixa de frequência. A indutância de 200 mH tem uma Q_l de 15, que pode ser considerada constante para a faixa de frequência de interesse. O capacitor de sintonia é fixo em 120 pF.

- a) Determine a frequência de ressonância.
- b) Determine a tensão do circuito tanque na ressonância.
- c) Determine a potência entregue pela fonte na ressonância.
- d) Calcule a potência perdida no indutor tanque devido à resistência interna e compare o resultado com a potência entregue no item (c).

16. Considerando o circuito visto na Figura 20.55:
- a) Determine o valor de X_C na ressonância (f_p).
 - b) Determine a impedância total Z_{Tp} na ressonância (f_p).
 - c) Determine as correntes I_L e I_C na ressonância (f_p).
 - d) Se a frequência de ressonância é 20.000 Hz, determine os valores de L e C .
 - e) Calcule Q_p e BW .

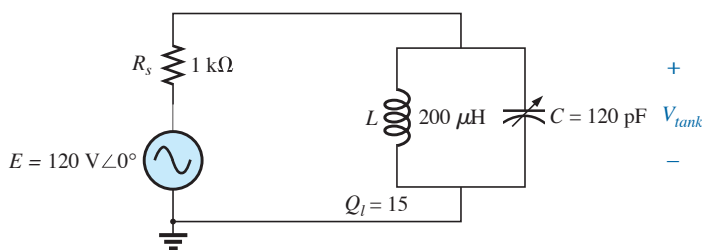


Figura 20.54 Problema 15.

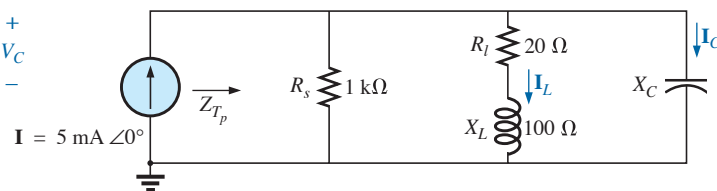


Figura 20.55 Problema 16.

*17. O circuito mostrado na Figura 20.56 deverá ressonar em $2 \times 10^6/2\pi$ Hz e ter uma largura de banda de $100.000/2\pi$ Hz. Se o indutor tem uma Q_l de 35 (constante para a faixa de frequência de interesse), calcule os valores de R e C . Encontre os valores comerciais mais próximos disponíveis para R e C .

18. Considerando o circuito visto na Figura 20.57:
- a) Determine as frequências de ressonância f_s , f_p e f_m . O que os resultados sugerem em relação ao Q_p do circuito?
 - b) Determine os valores de X_L e X_C na ressonância (f_p). Compare as duas reatâncias.
 - c) Determine a impedância Z_{Tp} na ressonância (f_p).
 - d) Calcule Q_p e BW .
 - e) Determine as correntes I_L e I_C na ressonância (f_p).
 - f) Calcule a tensão V_C na ressonância (f_p).

*19. Repita o Problema 18 para o circuito visto na Figura 20.58.

20. A impedância Z_T do circuito de alto Q mostrado na Figura 20.59 deve ser $50 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ$ na ressonância (f_p).

- a) Determine o valor de X_L .
- b) Calcule X_C .
- c) Determine a frequência de ressonância (f_p) se $L = 16 \text{ mH}$.
- d) Determine o valor de C .

21. Considerando o circuito visto na Figura 20.60:

- a) Calcule f_p .
- b) Calcule o valor de V_C na ressonância (f_p).
- c) Determine a potência absorvida na ressonância.
- d) Determine BW .

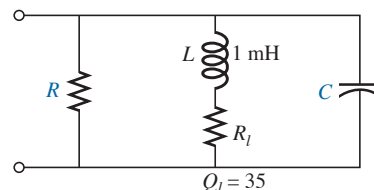


Figura 20.56 Problema 17.

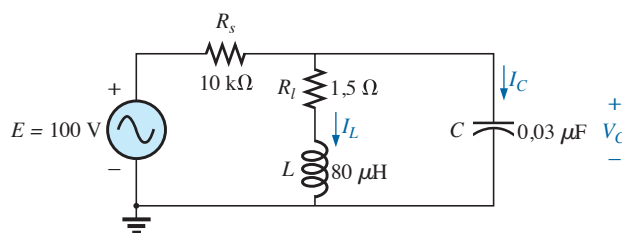


Figura 20.57 Problema 18.

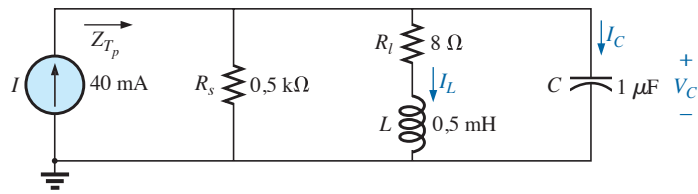


Figura 20.58 Problemas 19 e 29.

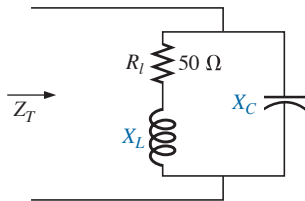


Figura 20.59 Problema 20.

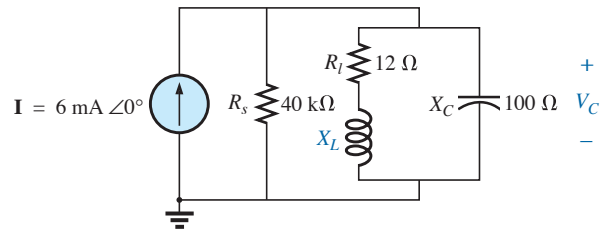


Figura 20.62 Problema 23.

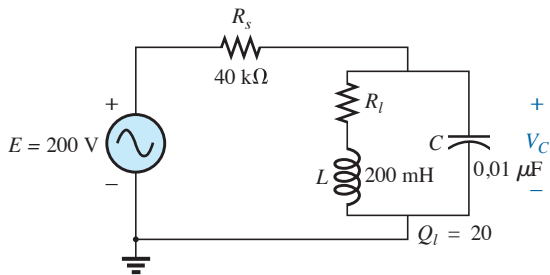


Figura 20.60 Problema 21.

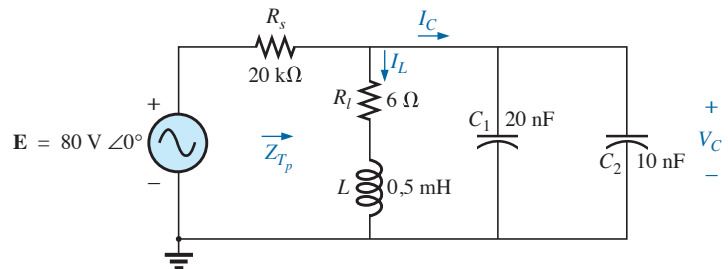


Figura 20.63 Problema 24.

- *22. Dado o circuito visto na Figura 20.61:
- calcule o valor de X_L para a ressonância.
 - calcule Q_l .
 - calcule a frequência de ressonância (f_p) se a largura de banda for 1 kHz.
 - calcule o valor máximo da tensão V_C .
 - plote a curva de V_C em função da frequência. Indique o valor máximo, a frequência de ressonância e as frequências de corte.
- *23. Repita o Problema 22 para o circuito visto na Figura 20.62.
- *24. Dado o circuito visto na Figura 20.63:
- calcule f_s, f_p e f_m .
 - determine Q_l e Q_p em f_p após uma conversão de fonte.
 - calcule a impedância de entrada Z_{Tp} .
 - calcule o valor da tensão V_C .
 - calcule a largura de banda a partir de f_p .
 - determine as correntes I_C e I_L .

- *25. Considere, para o circuito visto na Figura 20.64, as seguintes especificações:

$$f_p = 20 \text{ kHz}$$

$$BW = 1,8 \text{ kHz}$$

$$L = 2 \text{ mH}$$

$$Q_l = 80$$

Determine R_s e C .

- *26. Projete o circuito visto na Figura 20.65 para que ele apresente as seguintes características:

$$BW = 500 \text{ Hz}$$

$$Q_p = 30$$

$$V_{Cm\acute{a}x} = 1,8 \text{ V}$$

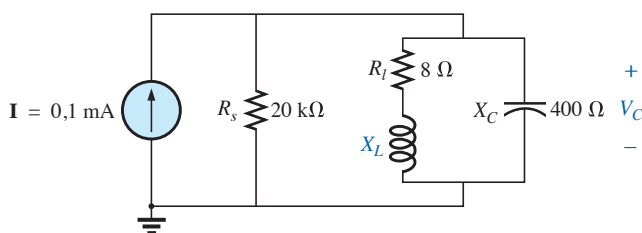


Figura 20.61 Problema 22.

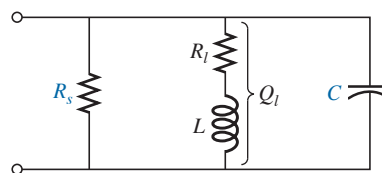


Figura 20.64 Problema 25.

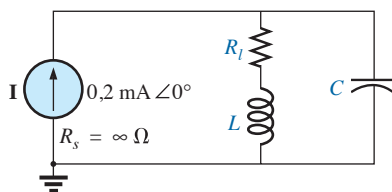


Figura 20.65 Problema 26.

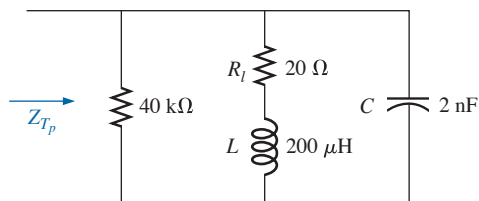


Figura 20.66 Problema 27.

- *27. Considerando o circuito ressonante em paralelo visto na Figura 20.66:
- Determine a frequência de ressonância.
 - Calcule a impedância total na ressonância.
 - Determine Q_p .
 - Calcule a largura de banda BW .
 - Repita os itens (a) a (d) para $L = 20 \mu\text{H}$ e $C = 20 \text{nF}$.
 - Repita os itens (a) a (d) para $L = 0,4 \text{mH}$ e $C = 1 \text{nF}$.
 - Considerando o circuito visto na Figura 20.66 e os parâmetros dos itens (e) e (f), determine a razão L/C .
 - Os resultados confirmam as conclusões mostradas na Figura 20.28 em relação à influência da razão L/C ?

Seção 20.14 Análise computacional

PSpice ou Multisim

- Verifique os resultados do Exemplo 20.8. Ou seja, mostre que a frequência de ressonância é de fato 40 kHz, que as frequências de corte são iguais às calculadas e que a largura de banda é 1,85 kHz.
- Determine as frequências f_p e f_m para o circuito ressonante em paralelo visto na Figura 20.58 e comente a largura de banda obtida, bem como sua relação com o fator de qualidade do circuito.

GLOSSÁRIO

Fator de qualidade (Q): Parâmetro que fornece indicação imediata da largura de uma curva de ressonância. Quanto maior o Q , mais estreita a curva, e, conseqüentemente, mais abruptamente ela diminuirá de amplitude à esquerda e à direita da frequência de ressonância.

Frequências de banda (corte, meia potência, canto): Frequências que definem os pontos na curva de ressonância que valem 0,707 do valor máximo de tensão ou corrente. Além disso, esses pontos definem as frequências nas quais a potência transferida para o circuito de ressonância é a metade do valor máximo.

Largura de banda (BW): Faixa de frequências entre as frequências de corte inferior e superior, ou frequências de meia potência.

Ressonância: Condição estabelecida pela aplicação de uma frequência particular (a frequência de ressonância) a um circuito R - L - C em série ou em paralelo. A transferência de potência para o sistema é máxima na frequência de ressonância, diminuindo significativamente de valor nas frequências abaixo e acima dessa frequência.

Seletividade: Característica dos circuitos ressonantes diretamente relacionada à largura de banda. A alta seletividade está associada a uma largura de banda estreita (altos valores de Q), e a baixa seletividade, a uma largura de banda larga (baixos valores de Q).