

Os dispositivos básicos e os fasores



Objetivos

- Familiarizar-se com a resposta de um resistor, indutor ou capacitor à aplicação de uma tensão ou de uma corrente senoidal.
- Aprender como aplicar o formato de fasor para somar e subtrair formas de onda senoidais.
- Entender como calcular a potência real dos dispositivos resistivos e a potência reativa aos dispositivos indutivo e capacitivo.
- Aprender as diferenças entre a resposta de frequência de dispositivos ideais e práticos.
- Aprender a usar uma calculadora para trabalhar com números complexos.

14.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estudaremos a resposta dos dispositivos básicos resistor (R), indutor (L) e capacitor (C) à aplicação de tensões senoidais, com uma atenção especial dedicada à análise de como a frequência influencia as características de ‘oposição’ de cada dispositivo. A notação fasorial será introduzida em seguida com o intuito de fornecer um método de análise que possibilite uma correspondência direta com os diversos métodos, teoremas e conceitos introduzidos nos capítulos em que se trata de corrente contínua.

14.2 A DERIVADA

Para compreender a resposta dos dispositivos básicos (R , L e C) a um sinal senoidal é necessário examinar o conceito de **derivada** detalhadamente. Não será necessário desenvolver uma grande habilidade nessa técnica matemática, mas apenas compreender o significado de uma relação definida por uma derivada.

Lembre-se de que na Seção 10.10 definimos a derivada dx/dt como a taxa de variação de x em relação ao tempo. Se não houver variação de x em um instante particular, $dx = 0$, a derivada será nula. No caso de uma forma de onda senoidal, dx/dt será zero apenas nos picos positivo e negativo ($\omega t = \pi/2$ e $\frac{3}{2}\pi$ na Figura 14.1), pois x não varia

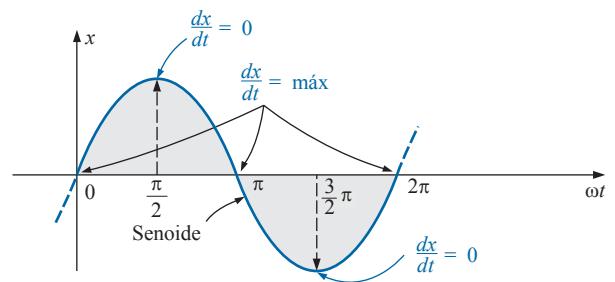


Figura 14.1 Pontos em que a derivada de uma senoide apresenta valores máximo e mínimo.

nesses instantes. O valor da derivada dx/dt em um gráfico é a inclinação da curva em um dado instante de tempo.

Um exame mais cuidadoso da senoide também indicará que a maior mudança em x ocorre nos instantes $\omega t = 0$, π e 2π . A derivada, portanto, é máxima nesses pontos. Em 0 e 2π , x aumenta até a sua razão máxima, e a derivada recebe um sinal positivo, pois x aumenta com o tempo. Em π , dx/dt diminui na mesma razão em que aumenta em 0 e 2π , mas a derivada recebe um sinal negativo, pois x diminui com o tempo. Como a razão de mudança em 0 , π e 2π é a mesma, a grandeza da derivada nesses pontos também é a mesma. Para diversos valores de ωt entre esses máximos e mínimos, a derivada existirá e terá valores desde o mínimo até o máximo. Um gráfico da derivada na Figura 14.2 mostra que:

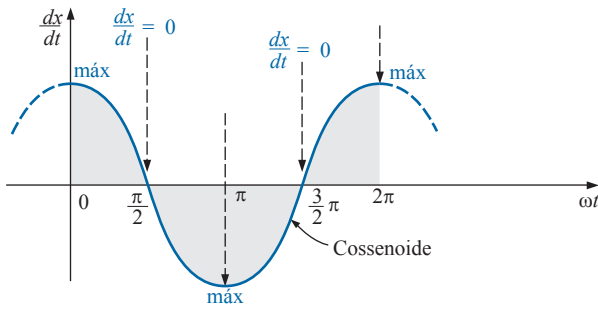


Figura 14.2 Gráfico da derivada da função senoidal vista na Figura 14.1.

a derivada de uma senoide é uma cossenoide.

O valor de pico da cossenoide é diretamente proporcional à frequência da forma de onda original. Quanto maior a frequência, maior a inclinação no ponto em que a curva corta o eixo, e, portanto, maior o valor de dx/dt nesse ponto, como mostra a Figura 14.3 para duas frequências diferentes.

Observe na Figura 14.3 que, embora as duas formas de onda (x_1 e x_2) tenham valores de pico iguais, a função senoidal de maior frequência produz uma função derivada com um valor de pico maior. Além disso, observe que

a derivada de uma senoide tem o mesmo período e a mesma frequência que a função senoidal original.

No caso de uma tensão senoidal,

$$e(t) = E_m \text{sen}(\omega t \pm \theta)$$

a derivada pode ser determinada diretamente por diferenciação (estudada no curso de cálculo), produzindo o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e(t) &= \omega E_m \cos(\omega t \pm \theta) \\ &= 2\pi f E_m \cos(\omega t \pm \theta) \end{aligned} \quad (14.1)$$

O mecanismo do processo de diferenciação não será discutido ou investigado neste livro, nem será necessário para prosseguir em seu estudo. Entretanto, observe que o valor de pico da derivada, $2\pi f E_m$, é uma função da frequência de $e(t)$ e que a derivada de uma senoide é uma função cossenoide.

14.3 RESPOSTA DOS DISPOSITIVOS BÁSICOS R, L E C A UMA TENSÃO OU A UMA CORRENTE SENOIDAL

Agora que estamos familiarizados com as características de derivada de uma função senoidal, podemos investigar a resposta dos dispositivos básicos R , L e C a uma tensão ou a uma corrente senoidal.

Resistor

Em termos práticos, para as frequências da rede elétrica e para as frequências com algumas centenas de kilohertz, o valor da resistência não é influenciado por tensões, nem por correntes senoidais aplicadas. Nessa faixa de frequência, o resistor R , visto na Figura 14.4, pode ser considerado constante e a lei de Ohm pode ser aplicada. Para $v = V_m \text{sen } \omega t$:

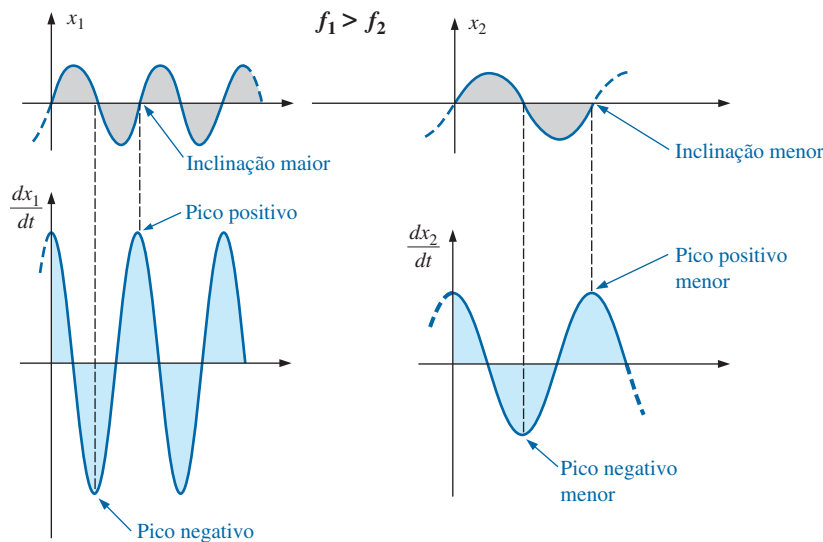


Figura 14.3 Efeito da frequência sobre o valor de pico da derivada.

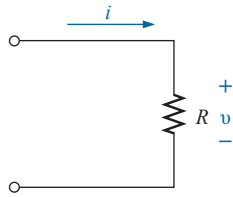


Figura 14.4 Resposta de um dispositivo resistivo a uma corrente senoidal.

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m \text{sen } \omega t}{R} = \frac{V_m}{R} \text{sen } \omega t = I_m \text{sen } \omega t$$

onde
$$I_m = \frac{V_m}{R} \tag{14.2}$$

Além disso, para determinado valor de i ,

$$v = iR = (I_m \text{sen } \omega t)R = I_m R \text{sen } \omega t = V_m \text{sen } \omega t$$

onde
$$V_m = I_m R \tag{14.3}$$

Um gráfico de v e i na Figura 14.5 revela que *para um dispositivo puramente resistivo, a tensão e a corrente que atravessam o dispositivo estão em fase, com seus valores de pico relacionados pela lei de Ohm.*

Indutor

Para a configuração em série vista na Figura 14.6, a tensão $v_{\text{dispositivo}}$ do dispositivo no interior da caixa se opõe à fonte e , reduzindo assim o valor da corrente i . O

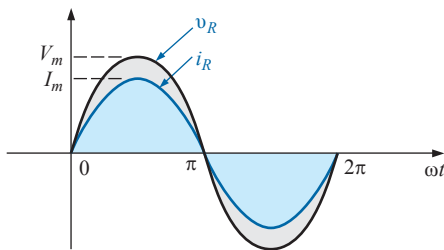


Figura 14.5 A tensão e a corrente de um dispositivo resistivo estão em fase.

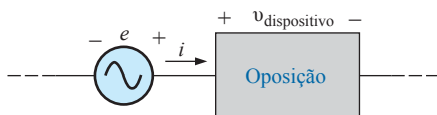


Figura 14.6 Ilustração de como um dispositivo se opõe à passagem de corrente.

valor da tensão sobre o dispositivo é determinado por sua oposição ao fluxo de carga, ou seja, à corrente i . No caso de um dispositivo resistivo, observamos que a oposição se deve à resistência, e que $v_{\text{dispositivo}}$ e i estão relacionados por $v_{\text{dispositivo}} = iR$.

Estudamos no Capítulo 11 que a tensão em um indutor é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente que o atravessa. Consequentemente, quanto maior a frequência, maior a taxa de variação da corrente no indutor e maior o valor da tensão induzida. Além disso, vimos no mesmo capítulo que a indutância de um enrolamento determina a taxa de variação do fluxo magnético no indutor para uma variação da corrente. Quanto maior a indutância, maior a taxa de variação do fluxo e maior a tensão no indutor.

Portanto, a tensão no indutor é diretamente proporcional à frequência (ou, mais especificamente, à frequência angular da corrente alternada senoidal nele) e à indutância do enrolamento. Para valores crescentes de f e L , conforme a Figura 14.7, o valor da tensão v_L aumenta conforme descrito anteriormente.

Comparando as figuras 14.6 e 14.7, percebemos que valores crescentes de v_L estão diretamente relacionadas a valores crescentes de oposição na Figura 14.6. Como v_L aumenta tanto em função de ω ($= 2\pi f$) quanto de L , a oposição de um dispositivo indutivo tem a forma definida na Figura 14.7.

Agora confirmaremos algumas das conclusões anteriores usando uma abordagem mais matemática e, em seguida, definiremos certas grandezas importantes que serão empregadas em seções e capítulos posteriores.

No caso do indutor visto na Figura 14.8, podemos nos lembrar que foi estudado no Capítulo 11 que:

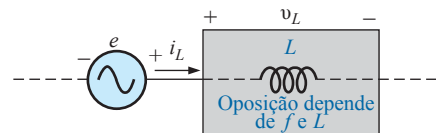


Figura 14.7 Ilustração dos parâmetros que determinam a oposição de um indutor à passagem de corrente.

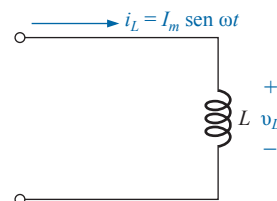


Figura 14.8 Investigação da resposta de um dispositivo indutivo a uma corrente senoidal.

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

e, aplicando a diferenciação,

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt}(I_m \text{sen } \omega t) = \omega I_m \cos \omega t$$

Portanto, $v_L = L \frac{di_L}{dt} = L(\omega I_m \cos \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$

ou $v_L = V_m \text{sen } (\omega t + 90^\circ)$
 onde $V_m = \omega L I_m$

Observe que o valor de pico de v_L é diretamente proporcional a ω ($= 2\pi f$) e a L , como previmos na discussão anterior.

O gráfico de v_L e i_L mostrado na Figura 14.9 revela que

para um indutor, v_L está adiantada 90° em relação a i_L , ou i_L está atrasada 90° em relação a v_L .

Se o ângulo fasorial é incluído em uma expressão para i_L , como:

$$i_L = I_m \text{sen } (\omega t \pm \theta)$$

então $v_L = \omega L I_m \text{sen } (\omega t \pm \theta + 90^\circ)$

A oposição causada por um indutor em um circuito de corrente alternada senoidal pode ser calculada agora a partir da Equação 4.1:

$$\text{Efeito} = \frac{\text{causa}}{\text{oposição}}$$

que, para os nossos propósitos, pode ser escrita como:

$$\text{Oposição} = \frac{\text{causa}}{\text{efeito}}$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$\text{Oposição} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{\omega L I_m}{I_m} = \omega L$$

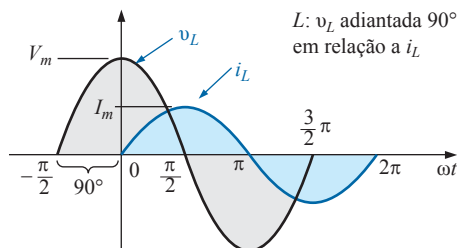


Figura 14.9 Para um indutor puro, a tensão está adiantada 90° em relação à corrente.

revelando que a oposição criada pelo indutor em um circuito de corrente alternada senoidal é diretamente proporcional ao produto da velocidade angular ($\omega = 2\pi f$) pela indutância, confirmando nossas conclusões anteriores.

A grandeza ωL , denominada **reatância** (derivada da palavra *reação*) indutiva, é simbolizada por X_L e medida em ohms. Ou seja,

$$X_L = \omega L \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad (14.4)$$

Usando a forma da lei de Ohm, seu valor pode ser determinado a partir de

$$X_L = \frac{V_m}{I_m} \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad (14.5)$$

A reatância indutiva é uma oposição à corrente que resulta em uma troca contínua de energia entre a fonte e o campo magnético do indutor. Em outras palavras, a reatância indutiva, ao contrário da resistência (que dissipa energia na forma de calor), não dissipa energia elétrica (ignorando os efeitos da resistência interna do indutor).

Capacitor

Retornemos à configuração em série vista na Figura 14.6, usando agora o capacitor como objeto de estudo. Entretanto, no caso do capacitor, determinaremos a corrente i para uma determinada tensão sobre ele. Quando a análise for concluída, a relação entre tensão e corrente será conhecida e a tensão de oposição ($v_{\text{dispositivo}}$) poderá ser determinada para qualquer corrente senoidal i .

Nossa investigação do indutor mostrou que a tensão induzida nos terminais da bobina se opõe à variação instantânea da corrente no indutor. No caso de circuitos capacitivos, a tensão no capacitor é limitada pela taxa com que a carga é depositada nas placas do capacitor ou ainda retirada delas, durante as fases de carga e de descarga, respectivamente. Em outras palavras, uma variação instantânea da tensão no capacitor sofre uma oposição devido ao fato de que é necessário um tempo para carregar (ou descarregar) as placas de um capacitor, e $V = Q/C$.

Como a capacitância é uma medida da rapidez com que um capacitor armazena carga em suas placas,

para uma determinada mudança na tensão do capacitor, quanto maior o valor da capacitância, maior a corrente capacitiva resultante.

Além disso, a equação fundamental relacionando a tensão em um capacitor à corrente que atravessa esse capacitor [$i = C(dv/dt)$] indica que

para uma determinada capacitância, quanto maior a taxa de variação da tensão entre os terminais de um capacitor, maior a corrente capacitiva.

Obviamente, um aumento da frequência corresponde a um aumento da taxa de variação da tensão no capacitor e a um aumento da corrente no capacitor.

Portanto, a corrente em um capacitor é diretamente proporcional à frequência (ou, mais especificamente, à frequência angular) e à capacitância dele. Um aumento em qualquer uma das duas grandezas provoca um aumento da corrente no capacitor. Entretanto, no caso da configuração básica vista na Figura 14.10, estamos interessados em determinar uma expressão para a oposição exercida pelo capacitor, análoga à resistência de um resistor e a ωL no caso de um indutor. Como um aumento da corrente implica uma menor oposição e i_C é proporcional a ω e à capacitância C , a oposição exercida por um capacitor é inversamente proporcional a ω ($= 2\pi f$) e C .

Agora, como fizemos no caso do indutor, verificaremos algumas das conclusões anteriores usando uma abordagem matemática.

No caso do capacitor mostrado na Figura 14.11, podemos lembrar do que vimos no Capítulo 11,

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

e, aplicando a diferenciação,

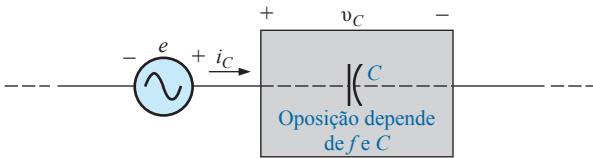


Figura 14.10 Ilustração dos parâmetros que determinam a oposição de um dispositivo capacitivo à passagem de corrente.

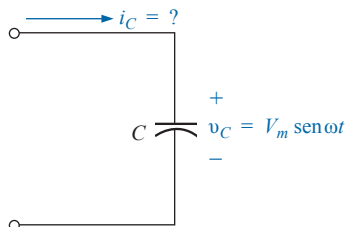


Figura 14.11 Investigação da resposta de um dispositivo capacitivo a uma corrente senoidal.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{d}{dt}(V_m \text{ sen } \omega t) = \omega V_m \text{ cos } \omega t$$

Portanto,

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = C(\omega V_m \text{ cos } \omega t) = \omega C V_m \text{ cos } \omega t$$

ou $i_C = I_m \text{ sen } (\omega t + 90^\circ)$

onde $I_m = \omega C V_m$

Note que o valor de pico de i_C é diretamente proporcional a ω ($= 2\pi f$) e C , como previmos na discussão anterior.

O gráfico de v_C e i_C , mostrado na Figura 14.12, revela que

para um capacitor, i_C está adiantada 90° em relação a v_C , ou v_C está atrasada 90° em relação a i_C .

Se um ângulo de fase for incluído na expressão senoidal de v_C , como:

$$v_C = V_m \text{ sen}(\omega t \pm \theta)$$

então $i_C = \omega C V_m \text{ sen}(\omega t \pm \theta + 90^\circ)$

Aplicando agora:

$$\text{Oposi}^\circ_{\text{A},0} = \frac{\text{causa}}{\text{efeito}}$$

e substituindo os valores, obtemos:

$$\text{Oposi}^\circ_{\text{A},0} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_m}{\omega C V_m} = \frac{1}{\omega C}$$

que concorda com os resultados obtidos anteriormente.

A grandeza $1/\omega C$, denominada **reatância** capacitiva, é simbolizada por X_C e medida em ohms. Ou seja,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad (14.6)$$

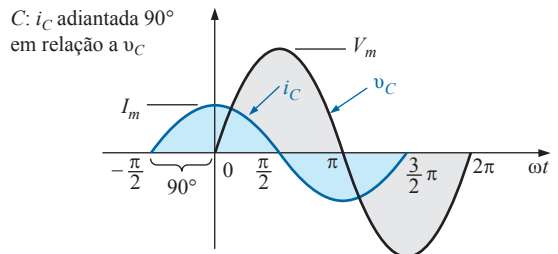


Figura 14.12 A corrente em um dispositivo puramente capacitivo está adiantada 90° em relação à tensão.

Usando a forma da lei de Ohm, seu valor pode ser determinado a partir de:

$$X_C = \frac{V_m}{I_m} \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad (14.7)$$

A reatância capacitiva é uma oposição à corrente que resulta em uma troca contínua de energia entre a fonte e o campo elétrico no capacitor. Assim como um indutor, um capacitor *não* dissipa energia (se ignorarmos os efeitos da resistência de fuga).

Nos circuitos considerados até aqui, foram dadas a corrente no circuito indutivo e a tensão no circuito capacitivo. Isso foi feito para evitar o uso de integração no cálculo das grandezas desconhecidas. No caso do circuito indutivo,

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

mas

$$i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt \quad (14.8)$$

No circuito capacitivo,

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

mas

$$v_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad (14.9)$$

Adiante, consideraremos um método de análise de circuitos de corrente alternada que permite calcular uma grandeza desconhecida para uma entrada senoidal, sem necessidade de recorrer à integração ou à diferenciação.

É possível determinar se um circuito com um ou mais dispositivos é predominantemente capacitivo ou indutivo observando a relação de fase entre a tensão e a corrente de entrada.

Se a corrente estiver adiantada em relação à tensão aplicada, o circuito será predominantemente capacitivo, e, se a tensão aplicada estiver adiantada em relação à corrente, ele será predominantemente indutivo.

Como agora já temos uma equação para o cálculo das reatâncias de indutores e capacitores, não há necessidade de usar derivação ou integração nos exemplos a serem considerados. Basta aplicar a lei de Ohm, $I_m = E_m/X_L$ ou $I_m = E_m/X_C$, e, levando em conta o fato de que existe uma diferença de fase entre a tensão e a corrente para cada um, isso será suficiente para solucionar os problemas apresentados nos exemplos.

EXEMPLO 14.1

Considerando a tensão no resistor, como indicam os itens (a) e (b), calcule as expressões para a corrente, sendo o resistor de 10Ω . Esboce os gráficos de v e i .

a) $v = 100 \text{ sen } 377t$

b) $v = 25 \text{ sen}(377t + 60^\circ)$

Soluções:

a) Equação 14.2: $I_m = \frac{V_m}{R} = \frac{100 \text{ V}}{10 \Omega} = 10 \text{ A}$

(v e i estão em fase), então,

$$i = 10 \text{ sen } 377t$$

As curvas de v e i são mostradas na Figura 14.13.

b) Equação 14.2: $I_m = \frac{V_m}{R} = \frac{25 \text{ V}}{10 \Omega} = 2,5 \text{ A}$

(v e i estão em fase), então,

$$i = 2,5 \text{ sen } (377t + 60^\circ)$$

As curvas de v e i são mostradas na Figura 14.14.

EXEMPLO 14.2

A corrente em um resistor de 5Ω é indicada. Determine a expressão senoidal da tensão no resistor para $i = 40 \text{ sen}(377t + 30^\circ)$.

Solução:

Equação 14.3: $V_m = I_m R = (40 \text{ A})(5 \Omega) = 200 \text{ V}$

(v e i estão em fase), então,

$$v = 200 \text{ sen } (377t + 30^\circ)$$

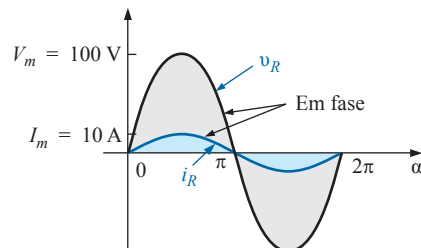


Figura 14.13 Exemplo 14.1(a).

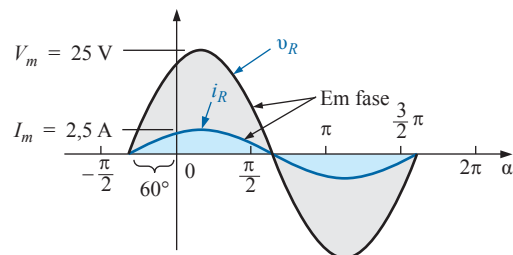


Figura 14.14 Exemplo 14.1(b).

EXEMPLO 14.3

A corrente em um indutor de 0,1 H é dada nos itens (a) e (b) a seguir. Determine em cada caso a expressão para a tensão no indutor. Esboce as curvas de v e i .

- a) $i = 10 \text{ sen } 377t$
- b) $i = 7 \text{ sen}(377t - 70^\circ)$

Soluções:

a) Equação 14.4: $X_L = \omega L = (377 \text{ rad/s})(0,1 \text{ H}) = 37,7 \Omega$

Equação 14.5: $V_m = I_m X_L = (10 \text{ A})(37,7 \Omega) = 377 \text{ V}$

Sabemos que, no caso de um indutor, v está adiantada 90° em relação a i . Portanto:

$$v = 377 \text{ sen } (377t + 90^\circ)$$

As curvas de v e i são mostradas na Figura 14.15.

b) X_L continua valendo $37,7 \Omega$.

$$V_m = I_m X_L = (7 \text{ A})(37,7 \Omega) = 263,9 \text{ V}$$

e, sabendo que para um indutor v está adiantada 90° em relação a i ,

$$v = 263,9 \text{ sen}(377t - 70^\circ + 90^\circ)$$

e

$$v = 263,9 \text{ sen}(377t + 20^\circ)$$

As curvas de v e i são mostradas na Figura 14.16.

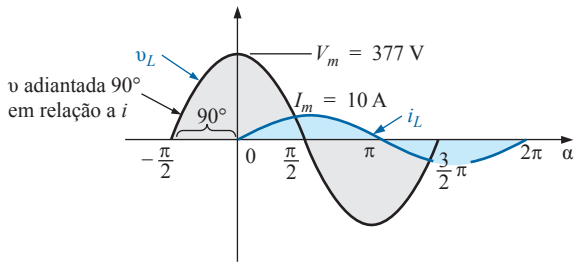


Figura 14.15 Exemplo 14.3(a).

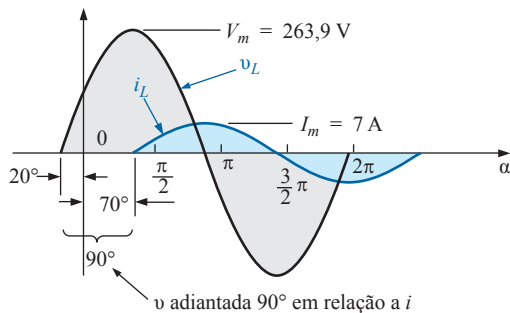


Figura 14.16 Exemplo 14.3(b).

EXEMPLO 14.4

A expressão para a tensão em um indutor é fornecida a seguir. Qual é a expressão senoidal para a corrente?

$$v = 100 \text{ sen } 20t$$

Solução:

$$X_L = \omega L = (20 \text{ rad/s})(0,5 \text{ H}) = 10 \Omega$$

$$I_m = \frac{V_m}{X_L} = \frac{100 \text{ V}}{10 \Omega} = 10 \text{ A}$$

e sabendo que i está atrasada 90° em relação a v ,

$$i = 10 \text{ sen}(20t - 90^\circ)$$

EXEMPLO 14.5

A expressão para a tensão em um capacitor de $1 \mu\text{F}$ é fornecida a seguir. Qual é a expressão senoidal para a corrente? Faça um esboço das curvas de v e i .

$$v = 30 \text{ sen } 400t$$

Solução:

$$\begin{aligned} \text{Equação 14.6: } X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(400 \text{ rad/s})(1 \times 10^{-6} \text{ F})} \\ &= \frac{10^6 \Omega}{400} = 2500 \Omega \end{aligned}$$

$$\text{Equação 14.7: } I_m = \frac{V_m}{X_C} = \frac{30 \text{ V}}{2500 \Omega} = 0,0120 \text{ A} = 12 \text{ mA}$$

e sabendo que, para um capacitor, i está adiantada 90° em relação a v ,

$$i = 12 \times 10^{-3} \text{ sen } (400t + 90^\circ)$$

As curvas v e i são mostradas na Figura 14.17.

EXEMPLO 14.6

A expressão para a corrente em um capacitor de $100 \mu\text{F}$ é dada a seguir. Determine a expressão senoidal para a tensão no capacitor.

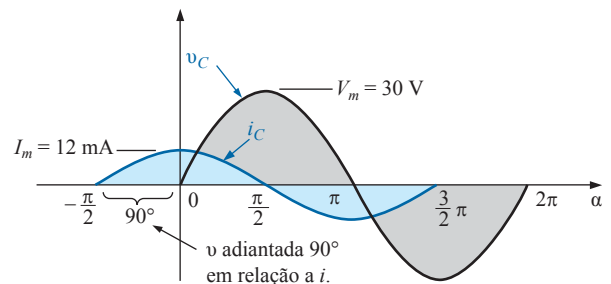


Figura 14.17 Exemplo 14.5.

$$i = 40 \text{ sen}(500t + 60^\circ)$$

Solução:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(500 \text{ rad/s})(100 \times 10^{-6} \text{ F})} = \frac{10^6 \Omega}{5 \times 10^4} \\ &= \frac{10^2 \Omega}{5} = 20 \Omega \\ V_M &= I_M X_C = (40 \text{ A})(20 \Omega) = 800 \text{ V} \end{aligned}$$

e sabendo que, para um capacitor, v está atrasada 90° em relação a i ,

$$\begin{aligned} v &= 800 \text{ sen}(500t + 60^\circ - 90^\circ) \\ e \quad v &= \mathbf{800 \text{ sen}(500t - 30^\circ)} \end{aligned}$$

EXEMPLO 14.7

Dados os pares de expressões para tensões e correntes a seguir, determine se o dispositivo envolvido é um capacitor, um indutor ou um resistor. Calcule os valores de C , L e R se houver dados suficientes para isso (veja a Figura 14.18):

- a) $v = 100 \text{ sen}(\omega t + 40^\circ)$
 $i = 20 \text{ sen}(\omega t + 40^\circ)$
- b) $v = 1.000 \text{ sen}(377t + 10^\circ)$
 $i = 5 \text{ sen}(377t - 80^\circ)$
- c) $v = 500 \text{ sen}(157t + 30^\circ)$
 $i = 1 \text{ sen}(157t + 120^\circ)$
- d) $v = 50 \text{ cos}(\omega t + 20^\circ)$
 $i = 5 \text{ sen}(\omega t + 110^\circ)$

Soluções:

- a) Como v e i estão *em fase*, o dispositivo é um *resistor*, e:

$$R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100 \text{ V}}{2 \text{ A}} = \mathbf{5 \Omega}$$

- b) Como v está *adiantada* 90° em relação a i , o dispositivo é um *indutor*, e:

$$X_L = \frac{V_m}{I_m} = \frac{1000 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 200 \Omega$$

de forma que: $X_L = \omega L = 200 \Omega$ ou

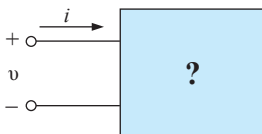


Figura 14.18 Exemplo 14.7.

$$L = \frac{200 \Omega}{\omega} = \frac{200 \Omega}{377 \text{ rad/s}} = \mathbf{0,53 \text{ H}}$$

- c) Como i está *adiantada* 90° em relação a v , o dispositivo é um *capacitor*, e:

$$X_C = \frac{V_m}{I_m} = \frac{500 \text{ V}}{1 \text{ A}} = 500 \Omega$$

de forma que: $X_C = \frac{1}{\omega C} = 500 \Omega$ ou

$$C = \frac{1}{\omega 500 \Omega} = \frac{1}{(157 \text{ rad/s})(500 \Omega)} = \mathbf{12,74 \text{ F}}$$

- d) $v = 50 \text{ cos}(\omega t + 20^\circ) = 50 \text{ sen}(\omega t + 20^\circ + 90^\circ)$
 $= 50 \text{ sen}(\omega t + 110^\circ)$

Como v e i estão *em fase*, o dispositivo é um *resistor*, e:

$$R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{50 \text{ V}}{5 \text{ A}} = \mathbf{10 \Omega}$$

14.4 RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DOS DISPOSITIVOS BÁSICOS

Até agora, cada descrição foi feita para uma frequência definida, resultando em um nível de impedância fixo para cada um dos dispositivos básicos. Agora, precisamos investigar como uma mudança na frequência afeta o nível de impedância dos dispositivos básicos. Essa não é uma consideração importante, pois a maioria dos sinais que não sejam aqueles fornecidos por uma companhia de energia contém uma série de níveis de frequência. A seção anterior deixou bem claro que a reatância de um indutor ou de um capacitor é sensível à frequência aplicada. Porém, surge uma questão: como esses níveis de reatância mudam se aumentarmos uniformemente a frequência de um nível muito baixo para um nível muito mais alto?

Embora queiramos pensar em cada dispositivo como o ideal, é importante observar que cada dispositivo comercial disponível hoje *não responderá em um padrão ideal por toda a faixa de frequências possíveis*. Ou seja, cada dispositivo é tal que, para uma faixa de frequências, ele funciona de uma maneira basicamente ideal. Porém, há sempre um intervalo de frequências em que o desempenho varia do ideal. Felizmente, o projetista está ciente dessas limitações e as levará em consideração no projeto.

A discussão começa com uma ideia da resposta dos *dispositivos ideais* — uma resposta que será considerada nos capítulos restantes deste livro e que pode ser assumida em qualquer investigação inicial de um circuito. Essa discussão é acompanhada por uma ideia dos fatores que fazem com que o dispositivo desvie da resposta ideal à

medida que os níveis de frequência se tornam muito baixos ou muito altos.

Resposta ideal

Resistor R. Para um resistor ideal, podemos supor que a frequência ideal, rigorosamente, não terá efeito nenhum sobre o nível de impedância, como mostra a resposta na Figura 14.19. Observe que, em 5 kHz ou em 20 kHz, a resistência do resistor permanece em 22 Ω; não há qualquer mudança. Para o restante das análises neste livro, o nível de resistência permanece com o valor nominal, não importando qual seja a frequência aplicada.

Indutor L. Para o indutor ideal, a equação para a reatância pode ser escrita da forma mostrada a seguir, a fim de isolar o termo da frequência na equação. O resultado é uma constante vezes a variável de frequência que muda enquanto descemos pelo eixo horizontal de um gráfico:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = (2\pi L)f = kf \quad \text{com } k = 2\pi L$$

A equação resultante pode ser comparada diretamente com a equação para uma linha reta:

$$y = mx + b = kf + 0 = kf$$

onde $b = 0$ e a inclinação é k ou $2\pi L$. X_L é a variável y , e f é a variável x , como mostra a Figura 14.20. Como a indutância determina a inclinação da curva, quanto maior a indutância, mais inclinado é o gráfico da linha reta, como mostra a Figura 14.20 para os dois níveis de indutância.

Particularmente, observe que, em $f = 0$ Hz, a reatância de cada gráfico é zero ohm, conforme determinado pela substituição de $f = 0$ Hz na equação básica para a reatância de um indutor:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(0 \text{ Hz})L = 0 \Omega$$

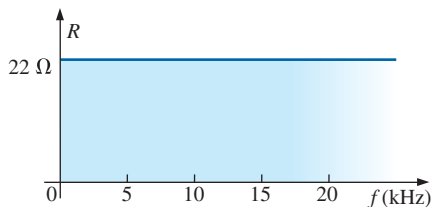


Figura 14.19 R em função de f para o intervalo de interesse.

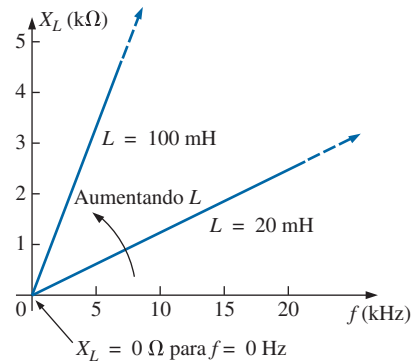


Figura 14.20 X_L contra frequência.

Como a reatância de zero ohm corresponde às características de um curto-circuito, podemos concluir que

a uma frequência de 0 Hz, um indutor assume as características de um curto-circuito, como pode ser visto na Figura 14.21.

Como a Figura 14.21 indica, quando a frequência aumenta, a reatância aumenta, até que ela alcança um nível extremamente alto em frequências muito altas. O resultado é que:

com frequências muito altas, as características de um indutor se aproximam às de um circuito aberto, como pode ser visto na Figura 14.21.

O indutor, portanto, é capaz de tratar de níveis de impedância que abrangem a faixa inteira, de zero ohm até infinitos ohms, mudando a uma velocidade constante determinada pelo nível de indutância. Quanto mais alta a indutância, mais rapidamente ela se aproxima do equivalente do circuito aberto.

Capacitor C. Para o capacitor, a equação para a reatância

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

pode ser escrita como:

$$X_C f = \frac{1}{2\pi C} = k \quad \text{(uma constante)}$$

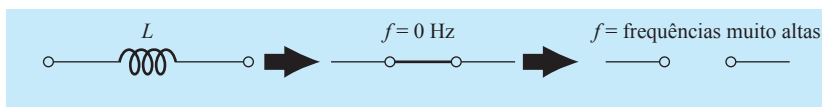


Figura 14.21 Efeito de frequências baixas e altas sobre o modelo de circuito de um indutor.

que corresponde ao formato básico de uma hipérbole:

$$yx = k$$

onde X_C é a variável y , f é a variável x e k é uma constante igual a $1/(2\pi C)$.

Hipérbolas têm a forma que aparece na Figura 14.22 para dois níveis de capacitância. Observe que, quanto mais alta a capacitância, mais a curva se aproxima dos eixos vertical e horizontal em frequências baixas e altas.

A 0 Hz, ou perto disso, a reatância de qualquer capacitor é extremamente alta, conforme determinado pela equação básica para a capacitância:

$$X_C \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(0\text{Hz})C} \Rightarrow \infty \Omega$$

O resultado é que

a 0 Hz ou perto disso, as características de um capacitor se aproximam às de um circuito aberto, como mostra a Figura 14.23.

À medida que a frequência aumenta, a reatância se aproxima de um valor de zero ohm. O resultado é que

com frequências muito altas, um capacitor assume as características de um curto-circuito, como pode ser visto na Figura 14.23.

É importante observar, na Figura 14.22, que a reatância cai muito rapidamente quando a frequência aumenta. Essa não é uma queda gradual, como ocorre no caso do aumento na reatância indutiva. Além disso, a reatância

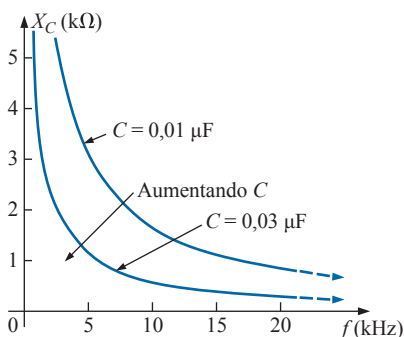


Figura 14.22 X_C contra frequência.

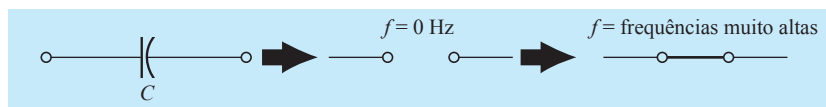


Figura 14.23 Efeito de frequências baixas e altas sobre o modelo de circuito de um capacitor.

se situa em um nível muito baixo para uma grande faixa de frequências. Em geral, portanto, reconheça que, para dispositivos capacitivos, uma mudança relativamente pequena no nível de frequência pode acarretar uma mudança muito drástica no nível de reatância.

Finalmente, reconheça o seguinte:

À medida que a frequência aumenta, a reatância de um dispositivo indutivo aumenta, enquanto a de um capacitor diminui, como se um se aproximasse do equivalente a um circuito aberto enquanto o outro se aproxima do equivalente a um curto-circuito.

Resposta prática

Resistor R. No processo de fabricação, cada dispositivo resistivo herda alguns níveis de capacitância parasita e indutâncias do fio. Para a maioria das aplicações, os níveis são tão baixos que seus efeitos podem ser ignorados. Porém, quando a frequência ultrapassa alguns megahertz, pode ser preciso conhecer seus efeitos. Por exemplo, diversos resistores com composição de carbono possuem uma resposta em frequência como a que aparece na Figura 14.24. O resistor de 100 Ω é basicamente estável até cerca de 300 MHz, enquanto o resistor de 100 k Ω começa a cair ao atingir mais ou menos 15 MHz. Em geral, portanto, esse tipo de resistor com composição de carbono tem as características ideais da Figura 14.19 para frequências de até cerca de 15 MHz. Para frequências de 100 Hz, 1 kHz, 150 kHz, e assim por diante, o resistor pode ser considerado ideal.

A escala horizontal da Figura 14.24 é uma escala logarítmica que começa em 1 MHz em vez de zero, conforme aplicada à escala vertical. Os logaritmos são discutidos em detalhes no Capítulo 21, que descreve por que a escala não pode começar em zero e o fato de que os intervalos principais são separados por potências de 10. Por enquanto, basta observar que as escalas logarítmicas permitem a exibição de um intervalo de frequências inviável com uma escala linear, como a que foi usada para a escala vertical da Figura 14.24. Imagine tentar desenhar uma escala linear de 1 MHz a 1000 MHz usando uma escala linear. Essa seria uma tarefa impossível, a menos que a largura do gráfico fosse enorme. Conforme indicamos, explicaremos muito mais sobre as escalas logarítmicas no Capítulo 21.

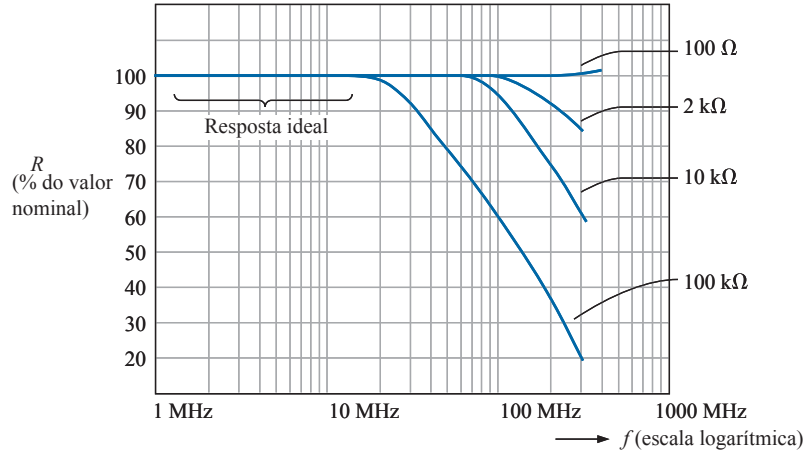


Figura 14.24 Equivalente prático para um indutor.

Indutor L . Na realidade, a indutância pode ser afetada por frequência, temperatura e corrente. Um equivalente verdadeiro para um indutor aparece na Figura 14.25. A resistência em série R_s representa as perdas no cobre (resistência das muitas voltas do fino fio de cobre); as perdas de correntes parasitas (perdas devido a pequenas correntes circulares no núcleo quando uma tensão CA é aplicada); e as perdas por histerese (perdas devido às perdas do núcleo criadas pelo campo em rápida reversão no núcleo). A capacitância C_p é a capacitância parasita que existe entre os enrolamentos do indutor.

Na maioria dos indutores, a construção normalmente é tal que, quanto maior a indutância, menor a frequência

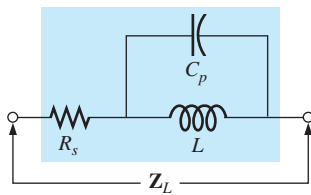


Figura 14.25 Equivalente prático para um indutor.

em que os dispositivos parasitas se tornam importantes. Ou seja, para os indutores na faixa de milihenry (mH, o que é muito comum), as frequências que se aproximam de 100 kHz podem ter um efeito sobre as características ideais do elemento. Para indutores na faixa de microhenry (μH), uma frequência de 1 MHz pode introduzir efeitos negativos. Isso não é uma sugestão de que os indutores perdem seu efeito nessas frequências, mas, sim, que eles não podem mais ser considerados ideais (dispositivos puramente indutivos).

A Figura 14.26 mostra um gráfico do valor da impedância Z_L da Figura 14.25 em função da frequência. Observe que, até cerca de 2 MHz, a impedância aumenta de forma quase linear com a frequência, sugerindo claramente que o indutor de 100 μH é praticamente ideal. Entretanto, acima de 2 MHz, todos os fatores que contribuem para R_s começam a aumentar, enquanto a reatância devida ao dispositivo capacitivo C_p é mais pronunciada. O nível de queda da reatância capacitiva começa a ter um efeito de curto entre os enrolamentos do indutor e reduz o efeito indutivo geral. Por fim, se a frequência continuar a aumentar, os efeitos capacitivos superam os efeitos

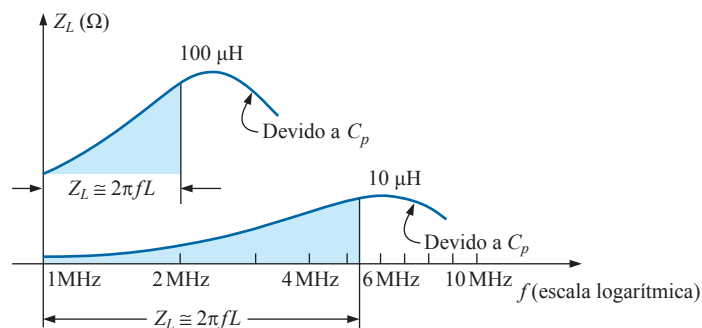


Figura 14.26 Z_L contra a frequência para o indutor prático equivalente da Figura 14.25.

indutivos, e o elemento realmente começa a se comportar em um padrão capacitivo. Observe as semelhanças dessa região com as curvas na Figura 14.22. Além disso, observe que níveis de indutância cada vez menores (o que pode ser alcançado usando menos espiras e, portanto, com níveis mais baixos de C_p) não demonstram o efeito degradante até que frequências maiores sejam aplicadas.

Em geral, portanto, a frequência a ser aplicada no indutor passa a ser importante quando ela é aumentada. Os indutores apresentam características que se distanciam das características de um componente ideal e passam a se comportar como dispositivos capacitivos, apresentando perdas crescentes com o aumento da frequência.

Capacitor C. O capacitor, assim como o indutor, não é ideal para toda a faixa de frequência. Na verdade, existe um ponto de transição em que as características de um capacitor realmente assumem as de um indutor. O modelo equivalente para um indutor que aparece na Figura 14.27(a) é uma versão expandida daquele que aparece na Figura 10.21. Um indutor L_s foi acrescentado para refletir a indutância presente devido aos fios do capacitor e qualquer indutância introduzida pelo projeto do capacitor. A indutância dos fios normalmente é de cerca de $0,05 \mu\text{H}$ por centímetro, que é aproximadamente $0,2 \mu\text{H}$ para um capacitor cujos terminais medem 2 cm — valor que pode ser importante em altas frequências.

A resistência R_d reflete a perda de energia devido ao atrito molecular associado ao movimento dos átomos sob o efeito de um campo elétrico alternado. Entretanto, o interessante é que a permissividade relativa diminui com o aumento da frequência, mas finalmente muda de direção e começa a aumentar em frequências altas. Observe que o capacitor foi incluído em série com R_d para refletir o fato de que essa perda não está presente sob condições de corrente contínua. O capacitor assume seu estado de circuito aberto para aplicações de CC.

A resistência R_p , que depende da resistividade do dielétrico (normalmente, da ordem de $10^{12} \Omega$ ou mais) e da resistência do encapsulamento, é que determina a intensidade da corrente de fuga durante o ciclo de descarga. Dependendo do capacitor, o tempo de descarga pode ir de uns poucos segundos, para alguns capacitores eletrolíticos, até várias horas (dielétrico de papel) ou até dias (dielétrico de poliestireno), revelando que esses capacitores normalmente possuem níveis muito menores de R_p do que a maioria dos outros capacitores.

O efeito de todos os elementos sobre a resposta real de um capacitor de filme metalizado de $0,01 \mu\text{F}$ com terminais de 2 cm é mostrado na Figura 14.27(b), onde a resposta é quase ideal para a faixa de baixa e média frequências, mas em cerca de 3,7 MHz ele começa a mostrar uma resposta indutiva devido a L_s .

Em geral, portanto, a frequência de aplicação é importante para os elementos capacitivos, pois, quando a frequência aumenta a um certo nível, os elementos assumem características indutivas. Além disso, a frequência de aplicação define o tipo do capacitor (ou indutor) que é aplicado: capacitores eletrolíticos são limitados a frequências de talvez 10 kHz, enquanto capacitores de cerâmica ou mica podem lidar com frequências maiores do que 10 MHz.

A faixa de temperatura de operação pode ter uma influência importante no tipo do capacitor escolhido para uma determinada aplicação. Os capacitores eletrolíticos, de tântalo e alguns de cerâmica de alto k são muito sensíveis a baixas temperaturas. De fato, muitos capacitores eletrolíticos, por exemplo, perdem 20 por cento da capacitância que possuem à temperatura ambiente quando resfriados a 0°C . As temperaturas altas (até 100°C ou 212°F) parecem ter uma influência menor que as temperaturas baixas, mas a capacitância dos capacitores de cerâmica de alto k pode diminuir até 30 por cento do seu valor à

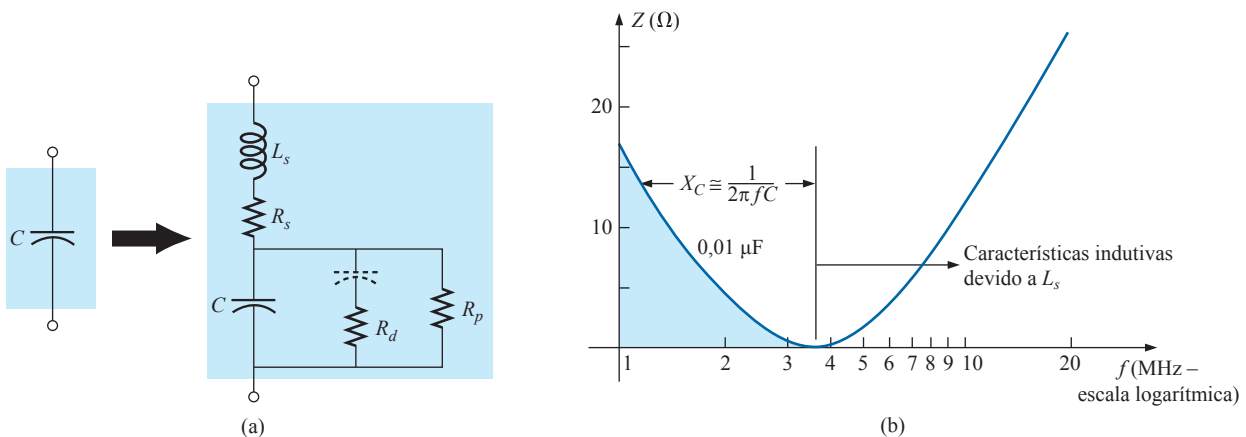


Figura 14.27 Circuito equivalente de um capacitor real; (a) circuito; (b) resposta.

temperatura ambiente quando é exposta à temperatura de 100°C. À medida que for adquirindo experiência, o leitor aprenderá a escolher o tipo de capacitor a ser empregado em cada aplicação e terá de fazer uma análise mais cuidadosa somente em condições extremas, como frequências muito altas, temperaturas extremas e valores muito grandes de tensão e corrente.

ESR. O termo *resistência equivalente em série* (ESR — Equivalent Series Resistance) foi introduzido no Capítulo 10, em que foi observado que o tópico apareceria novamente após o conceito de resposta em frequência ter sido apresentado. No mais simples dos termos, a ESR, que aparece no modelo simples da Figura 14.28(a), é o fator dissipador real que se pode esperar quando se usa um capacitor em diversas frequências. Para condições de CC, essa é basicamente a resistência CC do capacitor que aparece como R_s na Figura 14.27(a). Porém, para qualquer aplicação, o nível de dissipação será uma função dos níveis de R_p e R_d e a frequência aplicada.

Embora o espaço não permita uma derivação detalhada, a ESR para um capacitor é definida pela seguinte equação:

$$ESR = R_s + \frac{1}{\omega^2 C^2 R_p} + \frac{1}{\omega C^2 R_d}$$

Observe que o primeiro termo é simplesmente a resistência CC, e não é uma função da frequência. Porém, os dois termos seguintes são uma função da frequência no denominador, revelando que eles aumentam muito

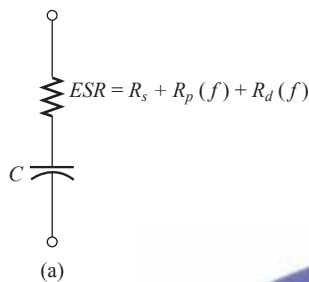


Figura 14.28 ESR. (a) Impacto no modelo equivalente; (b) Instrumento de medição. [Parte (b) por cortesia da Peak Electronic Design Limited.]

rapidamente enquanto a frequência cai. O resultado é a preocupação válida sobre os níveis de ESR em baixas frequências. Em altas frequências, os dois termos seguintes cairão rapidamente, deixando apenas a resistência CC. Em geral, portanto, lembre-se de que

o nível de ESR, ou resistência equivalente em série, é sensível à frequência e consideravelmente maior em baixas frequências que apenas a resistência CC. Em frequências muito altas, ele se aproxima do nível CC.

Esse é um fator tão importante em alguns projetos que instrumentos têm sido desenvolvidos principalmente para medir essa quantidade. Um instrumento desse tipo aparece na Figura 14.28(b).

Existem algumas regras sobre o nível de ESR associado a diversos capacitores. Para todas as aplicações, quanto menor a ESR, melhor. Os capacitores eletrolíticos normalmente têm níveis muito mais altos de ESR que os capacitores de filme, cerâmica ou papel. Um capacitor eletrolítico padrão de 22 μF tem uma ESR entre 5 e 30 Ω , enquanto um capacitor de cerâmica padrão tem apenas 10 a 100 $\text{m}\Omega$, uma diferença significativa. Os capacitores eletrolíticos, porém, devido às suas outras características, ainda são muito populares no projeto de fonte de alimentação; essa é simplesmente uma questão de balancear o nível de ESR com outros fatores importantes.

EXEMPLO 14.8

Em que frequência a reatância de um indutor de 200 mH corresponde ao nível de resistência de um resistor de 5 $\text{k}\Omega$?

Solução:

A resistência permanece constante a 5 $\text{k}\Omega$ para a faixa de frequência do indutor. Portanto,

$$R = 5000 \Omega = X_L = 2\pi fL = 2\pi Lf$$

$$= 2\pi(200 \times 10^{-3} \text{ H})f = 1,257f$$

e $f = \frac{5000 \text{ Hz}}{1,257} \cong 3,98 \text{ kHz}$

EXEMPLO 14.9

Em que frequência um indutor de 5 mH terá a mesma reatância de um capacitor de 0,1 μF ?

Solução:

$$X_L = X_C$$

$$2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$$

e

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(5 \times 10^{-3} \text{ H})(0,1 \times 10^{-6} \text{ F})}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{5 \times 10^{-10}}} = \frac{1}{(2\pi)(2,236 \times 10^{-5})} = \frac{10^5 \text{ Hz}}{14,05}$$

$$\cong 7,12 \text{ kHz}$$

14.5 POTÊNCIA MÉDIA E FATOR DE POTÊNCIA

Uma pergunta frequente é: como uma tensão ou uma corrente senoidal oferece potência a uma carga se parece estar fornecendo potência durante uma parte do seu ciclo e tirando-a durante a parte negativa do ciclo da senoide? As oscilações iguais acima e abaixo do eixo parecem sugerir que, por um ciclo completo, não existe transferência líquida de potência ou energia. Porém, como dissemos no capítulo anterior, existe uma transferência líquida de potência por um ciclo completo, pois a potência é fornecida à carga *a cada instante* da tensão ou corrente aplicada (exceto quando está cruzando o eixo), não importando o sentido da corrente ou a polaridade da tensão.

Para demonstrar isso, considere a configuração relativamente simples na Figura 14.29, onde uma tensão senoidal de pico é aplicada a um resistor de 2 Ω. Quando a tensão está em seu pico positivo, a potência fornecida nesse instante é 32 W, como mostra a figura. No ponto intermediário de 4 V, a potência instantânea fornecida cai para 8 W; quando a tensão atravessa o eixo, ela cai para 0 W. Observe, porém, que quando a tensão aplicada está em seu pico negativo, a corrente pode reverter, mas, nesse instante, 32 W ainda estão sendo fornecidos ao resistor.

No total, portanto,

embora a corrente e a tensão revertam o sentido e a polaridade, respectivamente, a potência é fornecida à carga resistiva a cada instante do tempo.

Se desenharmos a potência fornecida por um ciclo completo, obteremos a curva da Figura 14.30. Observe que a tensão aplicada e a corrente resultante estão em fase e possuem o dobro da frequência da curva de potência. Para um ciclo completo da tensão aplicada que tenha um período T , o nível de potência terá um pico em cada pulso da onda senoidal.

O fato de que a curva de potência está sempre acima do eixo horizontal revela que a potência está sendo fornecida à carga a cada instante do tempo da tensão senoidal aplicada.

Qualquer parte da curva de potência abaixo do eixo revela que a potência está sendo retornada à fonte. O valor médio da curva de potência ocorre em um nível igual a $V_m I_m / 2$, como mostra a Figura 14.30. Esse nível de potência é chamado de nível de **potência média** ou **real**. Ele estabelece um nível de potência em particular para o ciclo completo, de modo que não temos que determinar o nível de potência a se aplicar a uma quantidade que varia em uma natureza senoidal.

Se substituirmos a equação para o valor de pico em termos do valor rms como:

$$P_{\text{média}} = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{(\sqrt{2}V_{\text{rms}})(\sqrt{2}I_{\text{rms}})}{2} = \frac{2V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}}{2}$$

descobrimos que a potência média ou real fornecida a um resistor assume a seguinte forma, muito conveniente:

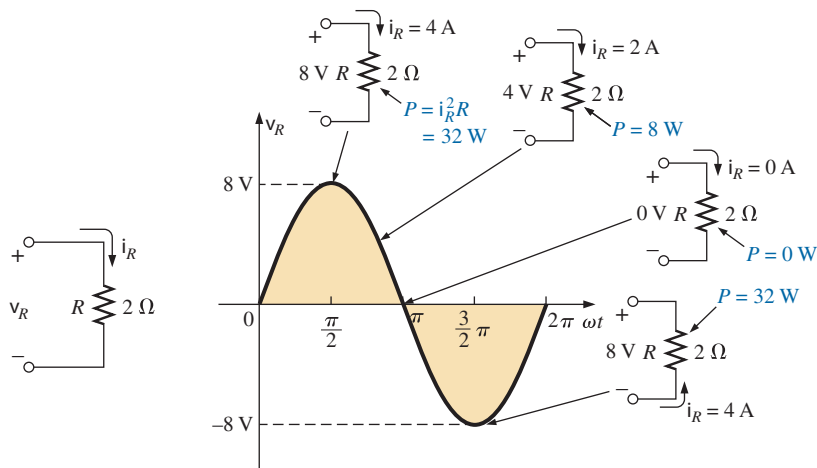


Figura 14.29 Demonstração de que a potência é fornecida em cada instante de uma forma de onda de tensão senoidal (exceto $v_R = 0 \text{ V}$).

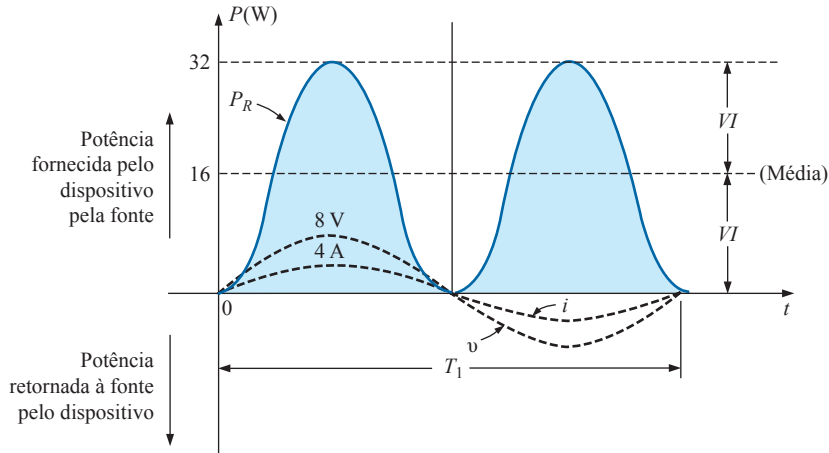


Figura 14.30 Potência em função do tempo para uma carga puramente resistiva.

$$P_{\text{média}} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \quad (14.10)$$

Observe que a equação da potência é exatamente a mesma quando aplicada a redes CC, desde que trabalhe-mos com valores rms.

A análise anterior se refere a uma carga puramente resistiva. Se a tensão senoidal for aplicada a uma rede com uma combinação de componentes R , L e C , a equação instantânea para os níveis de potência é mais complexa. Porém, se tivermos cuidado no desenvolvimento da equação geral e examinarmos os resultados, chegaremos a algumas conclusões gerais que serão muito úteis na análise a seguir.

Na Figura 14.31, uma tensão com um ângulo de fase inicial é aplicada a um circuito com qualquer combinação de elementos que resulte em uma corrente com o ângulo de fase indicado.

A potência fornecida a cada instante de tempo é então definida por:

$$p = vi = V_m \sin(\omega t + \theta_v) I_m \sin(\omega t + \theta_i) = V_m I_m \sin(\omega t + \theta_v) \sin(\omega t + \theta_i)$$

Usando a identidade trigonométrica, temos:

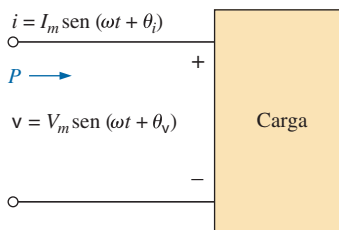


Figura 14.31 Determinação da potência dissipada em um circuito de corrente alternada senoidal.

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}$$

vemos que a função $\sin(\omega t + \theta_v) \sin(\omega t + \theta_i)$ se transforma em:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \theta_v) \sin(\omega t + \theta_i) &= \frac{\cos[(\omega t + \theta_v) - (\omega t + \theta_i)] - \cos[(\omega t + \theta_v) + (\omega t + \theta_i)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta_v - \theta_i) - \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}{2} \end{aligned}$$

de modo que

$$p = \left[\frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \right] - \left[\frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \right]$$

Valor fixo Variação no tempo (função de t)

A Figura 14.32 mostra uma representação de v , i e p sobre o mesmo conjunto de eixos.

Note que o segundo termo na equação anterior representa uma cossenoide de amplitude $V_m I_m / 2$ e frequência duas vezes maior que a da tensão e a da corrente. O valor médio desse termo é zero e, portanto, ele não tem nenhuma influência no processo de dissipação de energia.

Entretanto, o primeiro termo da equação anterior é constante (não depende do tempo), e representa uma transferência líquida de energia. Esse termo é chamado de **potência média** ou **potência real**, conforme explicado anteriormente. O ângulo $(\theta_v - \theta_i)$ é o ângulo de fase entre v e i . Como $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$,

o valor da potência média não depende do fato de a tensão estar atrasada ou adiantada em relação à corrente.

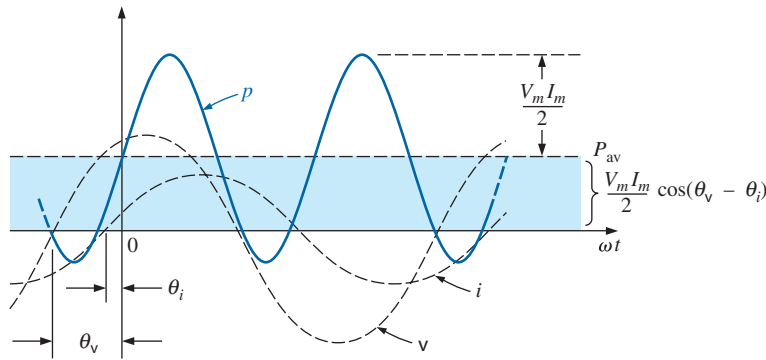


Figura 14.32 Determinação da potência média para um circuito de corrente alternada senoidal.

Fazendo θ igual a $|\theta_v - \theta_i|$, onde $|\cdot|$ indica que apenas o valor absoluto é importante, ou seja, o sinal é irrelevante, temos:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \quad (\text{watts, W}) \quad (14.11)$$

onde P é a potência média em watts. Essa equação também pode ser escrita na forma

$$P = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right) \cos \theta$$

ou, como $V_{\text{eff}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ e $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

A Equação 14.11 se transforma em

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \theta \quad (14.12)$$

Agora, aplicaremos as equações 14.11 e 14.12 aos dispositivos básicos R , L e C .

Resistor

Em um circuito puramente resistivo, como v e i estão em fase, $|\theta_v - \theta_i| = \theta = 0^\circ$ e $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$, de forma que:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \quad (\text{W}) \quad (14.13)$$

ou, como $I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{R}$

então $P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = I_{\text{rms}}^2 R \quad (\text{W}) \quad (14.14)$

Indutor

Em um circuito puramente indutivo, como v está adiantada 90° em relação a i , $|\theta_v - \theta_i| = \theta = |-90^\circ| = 90^\circ$. Portanto,

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos 90^\circ = \frac{V_m I_m}{2} (0) = \mathbf{0 \text{ W}}$$

A potência média ou potência dissipada por um indutor ideal (sem resistência associada) é zero.

Capacitor

Em um circuito puramente capacitivo, i está adiantada 90° em relação a v , logo $|\theta_v - \theta_i| = \theta = |-90^\circ| = 90^\circ$. Portanto,

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(90^\circ) = \frac{V_m I_m}{2} (0) = \mathbf{0 \text{ W}}$$

A potência média ou potência dissipada por um capacitor ideal (sem resistência associada) é zero.

EXEMPLO 14.10

Calcule a potência média dissipada em um circuito no qual a corrente e a tensão de entrada sejam dadas por:

$$i = 5 \text{ sen}(\omega t + 40^\circ) \\ v = 10 \text{ sen}(\omega t + 40^\circ)$$

Solução:

Como v e i estão em fase, o circuito se mostra puramente resistivo visto pelos terminais de entrada. Portanto,

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{(10 \text{ V})(5 \text{ A})}{2} = \mathbf{25 \text{ W}}$$

ou $R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{10 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 2 \Omega$

e $P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = \frac{[(0,707)(10 \text{ V})]^2}{2} = \mathbf{25 \text{ W}}$

ou $P = I_{\text{rms}}^2 R = [(0,707)(5 \text{ A})]^2 (2) = \mathbf{25 \text{ W}}$

No exemplo a seguir, os circuitos consistem em combinações de resistências e reatâncias que produzem diferenças de fase entre a tensão e a corrente de entrada diferentes de 0° e de 90° .

EXEMPLO 14.11

Determine a potência média fornecida a circuitos tendo as seguintes expressões para a tensão e para a corrente de entrada:

a) $v = 100 \text{ sen}(\omega t + 40^\circ)$

$i = 20 \text{ sen}(\omega t + 70^\circ)$

b) $v = 150 \text{ sen}(\omega t - 70^\circ)$

$i = 3 \text{ sen}(\omega t - 50^\circ)$

Soluções:

a) $V_m = 100$, $\theta_v = 40^\circ$

$I_m = 20 \text{ A}$, $\theta_i = 70^\circ$

$\theta = |\theta_v - \theta_i| = |40^\circ - 70^\circ| = |-30^\circ| = 30^\circ$

e $P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{(100 \text{ V})(20 \text{ A})}{2} \cos(30^\circ)$
 $= (1000 \text{ W})(0,866)$

b) $V_m = 150 \text{ V}$, $\theta_v = -70^\circ$

$I_m = 3 \text{ A}$, $\theta_i = -50^\circ$

$\theta = |\theta_v - \theta_i| = |-70^\circ - (-50^\circ)|$

$= |-70^\circ + 50^\circ| = |-20^\circ| = 20^\circ$

e $P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{(150 \text{ V})(3 \text{ A})}{2} \cos(20^\circ)$
 $= (225 \text{ W})(0,9397) = \mathbf{211,43 \text{ W}}$

Fator de potência

Na equação $P = (V_m I_m / 2) \cos \theta$, o fator que tem uma influência significativa no valor da potência fornecida é $\cos \theta$. Independentemente dos valores da tensão e da corrente, se $\cos \theta = 0$, a potência é nula; se $\cos \theta = 1$, a potência é máxima. Por ter tal influência, a expressão recebeu o nome **fator de potência**, e é definida por:

Fator de potência = $F_p = \cos \theta$ (14.15)

Para uma carga puramente resistiva como a ilustrada na Figura 14.33, a diferença de fase entre v e i é 0° e $F_p = \cos \theta = \cos 0^\circ = 1$. A potência fornecida é, no máximo, $(V_m I_m / 2) \cos \theta = ((100 \text{ V})(5 \text{ A}) / 2)(1) = 250 \text{ W}$.

No caso de uma carga puramente reativa (indutiva ou capacitiva), como a que é vista na Figura 14.34, a diferença de fase entre v e i é 90° e $F_p = \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$. Nesse caso, a potência entregue à carga é nula, *embora a corrente tenha o mesmo valor de pico* que no circuito da Figura 14.33.

Nas situações em que a carga é uma combinação de dispositivos resistivos e reativos, o fator de potência tem um valor entre 0 e 1. Quanto mais resistiva for a impe-

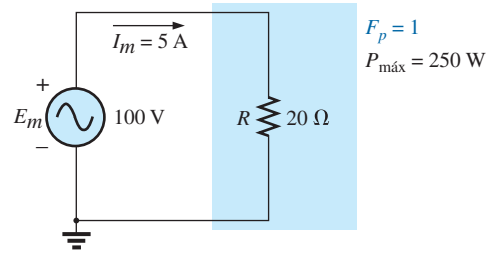


Figura 14.33 Carga puramente resistiva com $F_p = 1$.

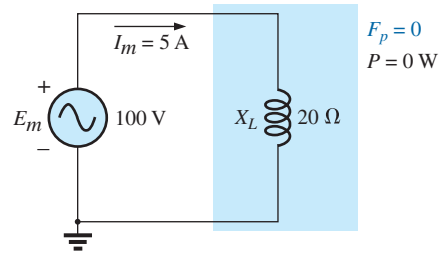


Figura 14.34 Carga puramente indutiva com $F_p = 0$.

dância total, mais próximo da unidade estará o fator de potência; quanto mais reativa é a impedância, mais o fator de potência se aproxima de zero.

Em termos da potência média, da tensão e da corrente no circuito, temos:

$F_p = \cos \theta = \frac{P}{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}}$ (14.16)

Os termos *adiantado* e *atrasado* são frequentemente escritos juntamente com o fator de potência. *O termo a ser usado é definido em função da corrente na carga*. Quando a corrente está adiantada em relação à tensão aplicada, dizemos que a carga tem um **fator de potência adiantado**. Quando a corrente está atrasada, dizemos que a carga tem um **fator de potência atrasado**. Em outras palavras,

os circuitos capacitivos têm um fator de potência adiantado, enquanto circuitos indutivos têm um fator de potência atrasado.

A importância do fator de potência para os sistemas de distribuição de energia é examinada no Capítulo 19. Na realidade, existe uma seção dedicada ao estudo da correção do fator de potência.

EXEMPLO 14.12

Determine os fatores de potência das cargas nas figuras mencionadas a seguir e verifique se eles estão atrasados ou adiantados:

- a) Figura 14.35

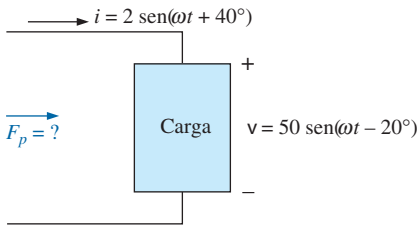


Figura 14.35 Exemplo 14.12(a).

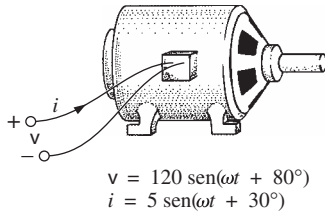


Figura 14.36 Exemplo 14.12(b).

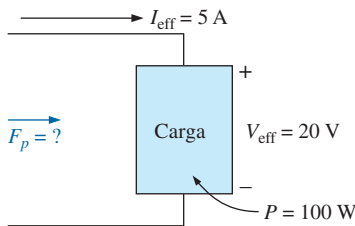


Figura 14.37 Exemplo 14.12(c).

b) Figura 14.36

c) Figura 14.37

Soluções:

a) $F_p = \cos \theta = \cos |40^\circ - (-20^\circ)| = \cos 60^\circ = \mathbf{0,5 \text{ adiantado}}$

b) $F_p = \cos \theta |80^\circ - 30^\circ| = \cos 50^\circ = \mathbf{0,64 \text{ atrasado}}$

c) $F_p = \cos \theta = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{100 \text{ W}}{(20 \text{ V})(5 \text{ A})} = \frac{100 \text{ W}}{100 \text{ W}} = \mathbf{1}$

A carga é resistiva e, portanto, F_p não está nem atrasado, nem adiantado.

14.6 NÚMEROS COMPLEXOS

Em nossa análise dos circuitos de corrente contínua, tivemos que determinar somas algébricas de tensões e de correntes. Como será necessário efetuar as mesmas operações para circuitos de corrente alternada, surge uma questão: como se calcula a soma algébrica de duas ou mais tensões (ou correntes) senoidais? Embora uma possível solução fosse calcular essa soma algébrica somando os valores das funções ponto a ponto (como é mostrado na

Seção 14.12), seria um processo longo e tedioso no qual a precisão dependeria da escala escolhida.

O objetivo deste capítulo é introduzir um sistema de **números complexos** que, quando aplicado a formas de onda CA senoidais, resulta em uma técnica de aplicação rápida, direta e precisa para determinar a soma algébrica de formas de onda senoidais. Nos capítulos a seguir, essa técnica será estendida à análise de circuitos alternados senoidais de uma maneira muito similar à aplicada em circuitos de corrente contínua. Os métodos e os teoremas descritos para os circuitos de corrente contínua poderão então ser aplicados aos circuitos senoidais sem muita dificuldade.

Um **número complexo** pode ser representado por um ponto em um plano bidimensional, associado a um sistema de eixos cartesianos. Esse ponto também determina um vetor a partir da origem até o ponto. O eixo horizontal é chamado de eixo *real*, e o vertical é denominado eixo *imaginário*. Os dois eixos estão indicados na Figura 14.38. Qualquer número real de zero a $\pm\infty$ pode ser representado por um ponto sobre o eixo real. Antes da introdução dos números complexos, acreditava-se que os números que estão fora do eixo real não existissem; foi por isso que o eixo vertical foi chamado de eixo *imaginário*.

No plano complexo, o eixo horizontal ou real representa todos os números positivos à direita do eixo imaginário e todos os números negativos à esquerda do mesmo. Todos os números imaginários positivos são representados acima do eixo real, e todos os números imaginários negativos, abaixo dele. O símbolo *j* (ou algumas vezes *i*) é usado para indicar a parte imaginária.

São usadas duas formas para representar um número complexo: a **retangular** e a **polar**. Cada uma delas pode representar um ponto no plano ou um vetor da origem até esse ponto.

14.7 FORMA RETANGULAR

A representação na **forma retangular** é:

$$\mathbf{C = X + jY} \tag{14.17}$$

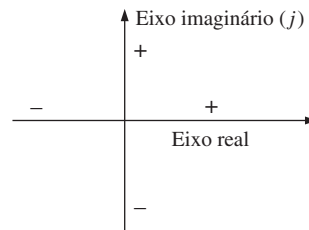


Figura 14.38 Definição dos eixos real e imaginário do plano complexo.

como mostra a Figura 14.39. A letra **C** foi escolhida a partir da palavra ‘complexo’. A notação em **negrito** é usada para qualquer número com magnitude e fase. A notação em *itálico* é usada apenas para a magnitude.

EXEMPLO 14.13

Represente os seguintes números no plano complexo:

- a) $C = 3 + j4$
- b) $C = 0 - j6$
- c) $C = -10 - j20$

Soluções:

- a) Veja a Figura 14.40.
- b) Veja a Figura 14.41.
- c) Veja a Figura 14.42.

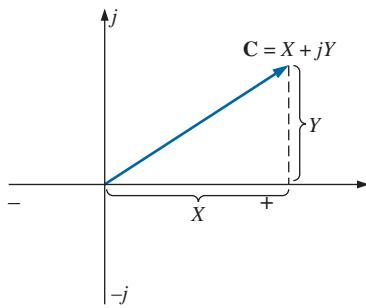


Figura 14.39 Forma retangular de um número complexo.

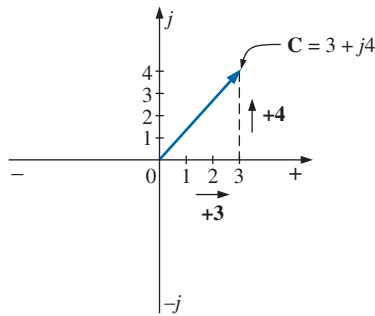


Figura 14.40 Exemplo 14.13(a).

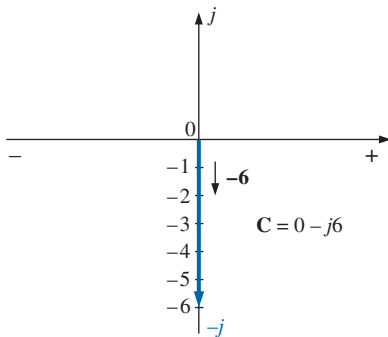


Figura 14.41 Exemplo 14.13(b).

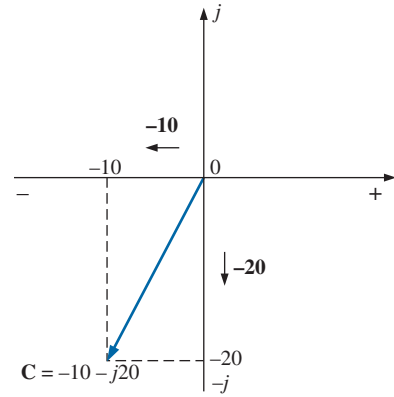


Figura 14.42 Exemplo 14.13(c).

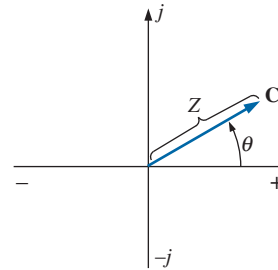


Figura 14.43 Forma polar de um número complexo.

14.8 FORMA POLAR

A representação de um número complexo na **forma polar** é

$$C = Z \angle \theta \tag{14.18}$$

onde a letra Z foi escolhida a partir da sequência X, Y, Z.

Z indica apenas o módulo, e θ é sempre medido no sentido anti-horário (CCW) a partir do eixo real positivo, como mostra a Figura 14.43. Os ângulos medidos no sentido horário a partir do eixo real positivo têm de ser associados a um sinal negativo.

O sinal negativo em frente ao número complexo na forma polar é mostrado na Figura 14.44. Observe que o resultado é um número complexo oposto ao número complexo com sinal positivo.

$$-C = -Z \angle \theta = Z \angle \theta \pm 180^\circ \tag{14.19}$$

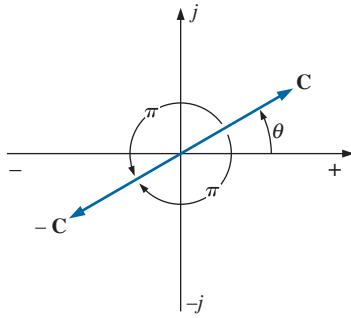


Figura 14.44 Efeito de um sinal negativo sobre a forma polar.

EXEMPLO 14.14

Represente os números complexos a seguir no plano complexo:

- a) $C = 5 \angle 30^\circ$
- b) $C = 7 \angle -120^\circ$
- c) $C = -4,2 \angle 60^\circ$

Soluções:

- a) Veja a Figura 14.45.
- b) Veja a Figura 14.46.
- c) Veja a Figura 14.47.

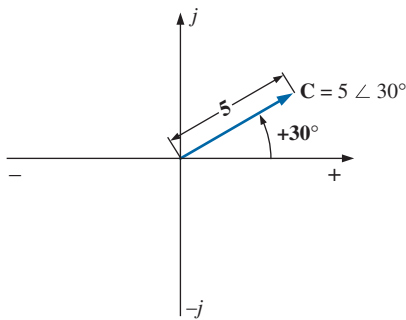


Figura 14.45 Exemplo 14.14(a).

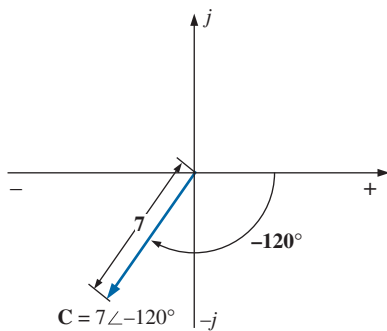


Figura 14.46 Exemplo 14.14(b).

$$C = -4,2 \angle 60^\circ = 4,2 \angle 60^\circ + 180^\circ = 4,2 \angle +240^\circ$$

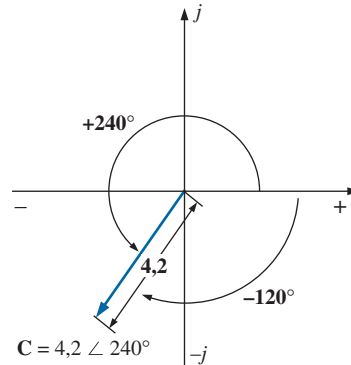


Figura 14.47 Exemplo 14.14(c).

14.9 CONVERSÃO ENTRE AS DUAS FORMAS

As duas formas são relacionadas pelas equações a seguir, conforme ilustra a Figura 14.48.

Retangular para polar

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{14.20}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{Y}{X} \tag{14.21}$$

Polar para retangular

$$X = Z \cos \theta \tag{14.22}$$

$$Y = Z \text{sen} \theta \tag{14.23}$$

EXEMPLO 14.15

Converta o número complexo a seguir, na forma retangular, para a forma polar:

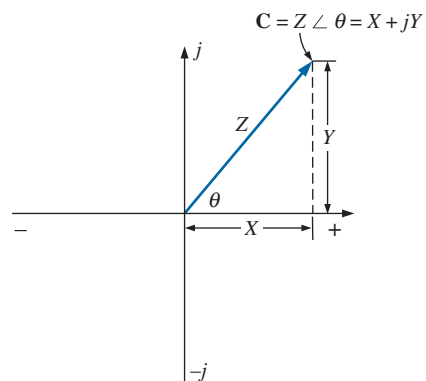


Figura 14.48 Relação entre as duas formas.

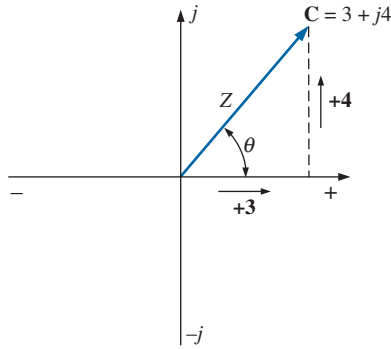


Figura 14.49 Exemplo 14.15.

$C = 3 + j4$ (Figura 14.49)

Solução:

$$Z = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13^\circ$$

e $C = 5 \angle 53,13^\circ$

EXEMPLO 14.16

Converta o seguinte número complexo, na forma polar, para a forma retangular:

$C = 10 \angle 45^\circ$ (Figura 14.50)

Solução:

$$X = 10 \cos 45^\circ = (10)(0,707) = 7,07$$

$$Y = 10 \sin 45^\circ = (10)(0,707) = 7,07$$

e $C = 7,07 + j7,07$

Se o ângulo de um número complexo estiver no segundo, no terceiro ou no quarto quadrante, basta convertê-lo nesse quadrante e determinar cuidadosamente o ângulo apropriado a ser associado à magnitude do vetor.

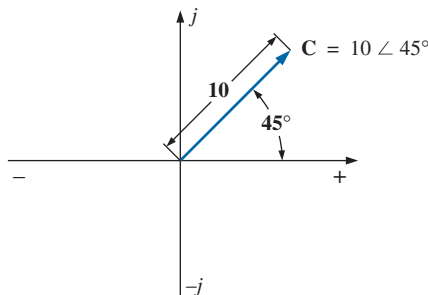


Figura 14.50 Exemplo 14.16.

EXEMPLO 14.17

Faça a seguinte conversão da forma retangular para a forma polar:

$C = -6 + j3$ (Figura 14.51)

Solução:

$$Z = \sqrt{(-6)^2 + (3)^2} = \sqrt{45} = 6,71$$

$$\beta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{3}{-6}\right) = 26,57^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 26,57^\circ = 153,43^\circ$$

e $C = 6,71 \angle 153,43^\circ$

EXEMPLO 14.18

Faça a seguinte conversão da forma polar para a forma retangular:

$C = 10 \angle 230^\circ$ (Figura 14.52)

Solução:

$$X = Z \cos \beta = 10 \cos(230^\circ - 180^\circ) = 10 \cos 50^\circ = (10)(0,6428) = 6,428$$

$$Y = Z \sin \beta = 10 \sin 50^\circ = (10)(0,7660) = 7,660$$

e $C = -6,43 - j7,66$

14.10 OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM NÚMEROS COMPLEXOS

As operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão podem ser realizadas com facilidade com os números complexos. Antes de considerarmos essas operações, algumas regras básicas e definições têm que ser bem compreendidas.

Examinaremos primeiro o símbolo *j* associado aos números imaginários. Por definição,

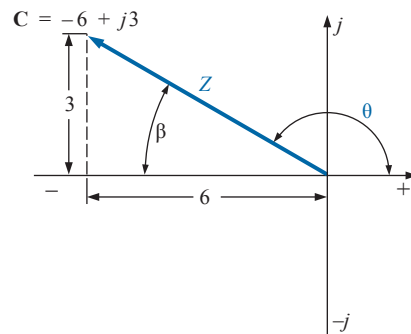


Figura 14.51 Exemplo 14.18.

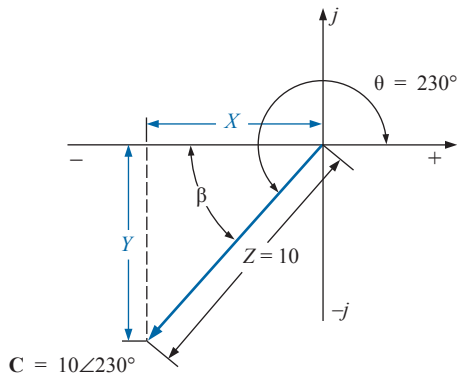


Figura 14.52 Exemplo 14.18.

$$j = \sqrt{-1} \quad (14.24)$$

Assim,

$$j^2 = -1 \quad (14.25)$$

e com

$$\begin{aligned} j^3 &= j^2j = -1j = -j \\ j^4 &= j^2j^2 = (-1)(-1) = +1 \\ j^5 &= j \end{aligned}$$

e assim por diante. Além disso,

$$\frac{1}{j} = (1) \left(\frac{1}{j} \right) = \left(\frac{j}{j} \right) \left(\frac{1}{j} \right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1}$$

e

$$\frac{1}{j} = -j \quad (14.26)$$

Complexo conjugado

O **conjugado** ou **complexo conjugado** de um número complexo é obtido simplesmente trocando o sinal da parte imaginária, na forma retangular, ou usando o negativo do ângulo, na forma polar. Por exemplo, o conjugado de:

$$C = 2 + j3$$

é

$$2 - j3$$

como mostra a Figura 14.53. O conjugado de:

$$C = 2 \angle 30^\circ$$

é

$$2 \angle -30^\circ$$

como ilustra a Figura 14.54.

Recíproco

O **recíproco** de um número complexo é 1 dividido pelo número complexo. Por exemplo, o recíproco de:

$$C = X + jY$$

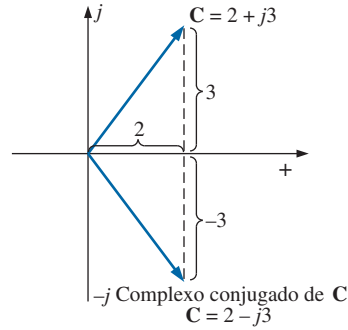


Figura 14.53 Definição do complexo conjugado de um número complexo na forma retangular.

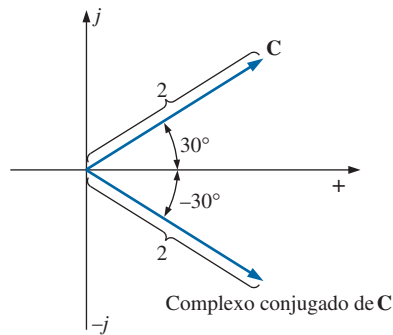


Figura 14.54 Definição de um complexo conjugado de um número complexo na forma polar.

é $\frac{1}{X + jY}$

e o de $Z \angle \theta$ é

$$\frac{1}{Z \angle \theta}$$

Agora estamos preparados para conhecer as operações de *adição*, *subtração*, *multiplicação* e *divisão* com números complexos.

Adição

Para adicionar dois ou mais números complexos, basta adicionar as partes reais e imaginárias separadamente. Por exemplo, se:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

então: $C_1 + C_2 = (\pm X_1 \pm X_2) + j(\pm Y_1 \pm Y_2)$ (14.27)

Na realidade, não é necessário memorizar essa equação. Simplesmente coloque um número sobre o outro e considere separadamente as partes reais e as imaginárias, como mostra o Exemplo 14.19.

EXEMPLO 14.19

- a) Adicione $C_1 = 2 + j4$ e $C_2 = 3 + j1$.
 b) Adicione $C_1 = 3 + j6$ e $C_2 = -6 + j3$.

Soluções:

- a) Pela Equação 14.27,

$$C_1 + C_2 = (2 + 3) + j(4 + 1) = 5 + j5$$

Observe a Figura 14.55. Um método alternativo é:

$$\begin{array}{r} 2 + j4 \\ 3 + j1 \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ 5 + j5 \end{array}$$

- b) Pela Equação 14.27,

$$C_1 + C_2 = (3 - 6) + j(6 + 3) = -3 + j9$$

Observe a Figura 14.56. Um método alternativo é:

$$\begin{array}{r} 3 + j6 \\ -6 + j3 \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ -3 + j9 \end{array}$$

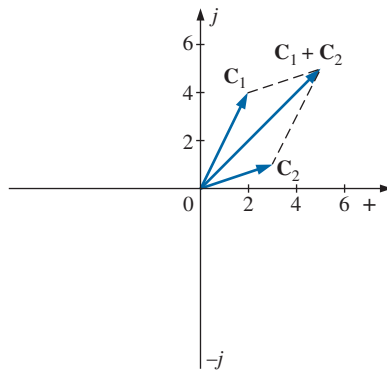


Figura 14.55 Exemplo 14.19(a).

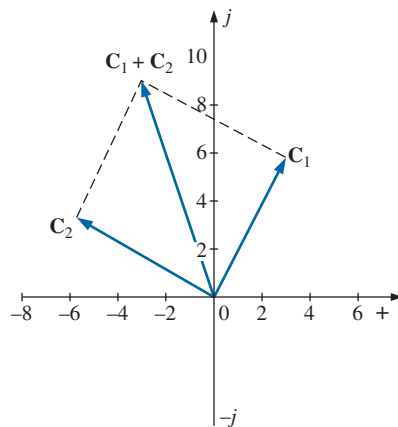


Figura 14.56 Exemplo 14.19(b).

Subtração

Na subtração, as partes reais e imaginárias também são consideradas separadamente. Por exemplo, se:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

então

$$C_1 - C_2 = [\pm X_1 - (\pm X_2)] + j[\pm Y_1 - (\pm Y_2)] \quad (14.28)$$

Novamente, não é necessário memorizar a expressão se utilizarmos o método alternativo, empregado no Exemplo 14.20.

EXEMPLO 14.20

- a) Subtraia $C_2 = 1 + j4$ de $C_1 = 4 + j6$.
 b) Subtraia $C_2 = -2 + j5$ de $C_1 = +3 + j3$.

Soluções:

- a) Pela Equação 14.28,

$$C_1 - C_2 = (4 - 1) + j(6 - 4) = 3 + j2$$

Observe a Figura 14.57. Um método alternativo é

$$\begin{array}{r} 4 + j6 \\ -(1 + j4) \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ 3 + j2 \end{array}$$

- b) Pela Equação 14.28,

$$C_1 - C_2 = [3 - (-2)] + j(3 - 5) = 5 - j2$$

Observe a Figura 14.58. Um método alternativo é

$$\begin{array}{r} 3 + j3 \\ -(-2 + j5) \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ 5 - j2 \end{array}$$

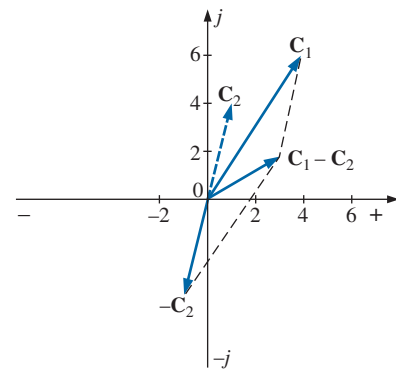


Figura 14.57 Exemplo 14.20(a).

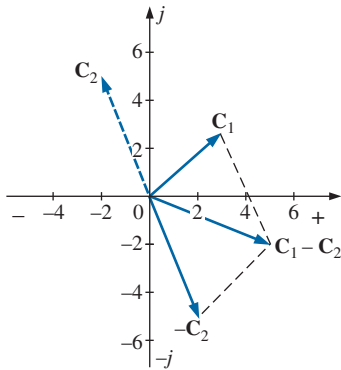


Figura 14.58 Exemplo 14.20(b).

A adição e a subtração não podem ser realizadas na forma polar, a menos que os números complexos tenham o mesmo ângulo θ ou a menos que sua diferença seja um múltiplo de 180° .

EXEMPLO 14.21

- a) $2 \angle 45^\circ + 3 \angle 45^\circ = 5 \angle 45^\circ$. Observe a Figura 14.59.
- b) $2 \angle 0^\circ - 4 \angle 180^\circ = 6 \angle 0^\circ$. Observe a Figura 14.60.

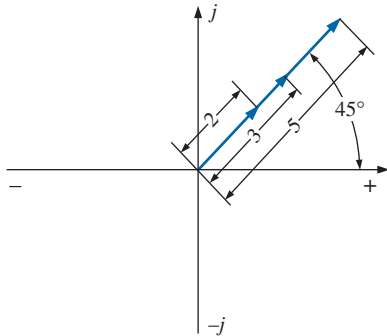


Figura 14.59 Exemplo 14.21(a).

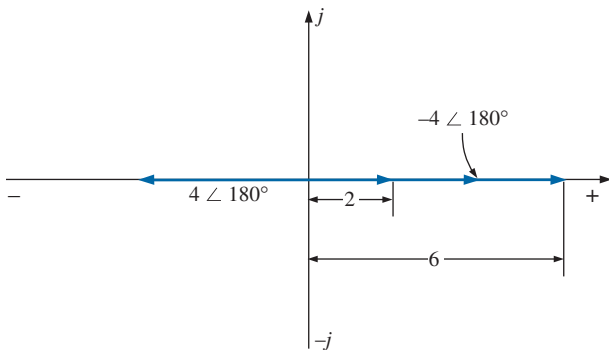


Figura 14.60 Exemplo 14.21(b).

Multiplicação

Para multiplicar dois números complexos na forma *retangular*, multiplique as partes real e imaginária de um pelas partes correspondentes do outro. Por exemplo, se:

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

então, $C_1 \cdot C_2$:

$$\begin{aligned} & \frac{X_1 + jY_1}{X_1X_2 + jY_1X_2} \\ & \frac{X_2 + jY_2}{+jX_1Y_2 + j^2Y_1Y_2} \\ & \frac{X_1X_2 + j(Y_1X_2 + X_1Y_2) + Y_1Y_2(-1)}{X_1X_2 + j(Y_1X_2 + X_1Y_2) + Y_1Y_2(-1)} \end{aligned}$$

e $C_1 \cdot C_2 = (X_1X_2 - Y_1Y_2) + j(Y_1X_2 + X_1Y_2)$ (14.29)

No Exemplo 14.22(b), obtivemos o resultado sem usar a Equação 14.29. Simplesmente efetuamos a multiplicação de cada parte de um vetor pelas partes real e imaginária do outro, tomando o devido cuidado com o fator j .

EXEMPLO 14.22

- a) Calcule $C_1 \cdot C_2$ se

$$C_1 = 2 + j3 \quad \text{e} \quad C_2 = 5 + j10$$

- b) Calcule $C_1 \cdot C_2$ se

$$C_1 = -2 - j3 \quad \text{e} \quad C_2 = +4 - j6$$

Soluções:

- a) Usando o formato mencionado, temos:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot C_2 &= [(2)(5) - (3)(10)] + j[(3)(5) + (2)(10)] \\ &= -20 + j35 \end{aligned}$$

- b) Efetuando diretamente a multiplicação, obtemos:

$$\begin{aligned} & -2 - j3 \\ & +4 - j6 \\ \hline & -8 - j12 \\ & +j12 + j^218 \\ \hline & -8 + j(-12 + 12) - 18 \end{aligned}$$

e $C_1 \cdot C_2 = -26 = 26 \angle 180^\circ$

Em formato *polar*, os valores são multiplicados e os ângulos são somados algebricamente. Por exemplo, para

$$C_1 = Z_1 \angle \theta_1 \quad \text{e} \quad C_2 = Z_2 \angle \theta_2$$

escrevemos: $C_1 \cdot C_2 = Z_1Z_2 \angle \theta_1 + \theta_2$ (14.30)

EXEMPLO 14.23

a) Calcule $C_1 \cdot C_2$ se

$$C_1 = 5 \angle 20^\circ \quad \text{e} \quad C_2 = 10 \angle 30^\circ$$

b) Calcule $C_1 \cdot C_2$ se

$$C_1 = 2 \angle -40^\circ \quad \text{e} \quad C_2 = 7 \angle +120^\circ$$

Soluções:

a) $C_1 \cdot C_2 = (5 \angle 20^\circ)(10 \angle 30^\circ) = (5)(10) \angle 20^\circ + 30^\circ = \mathbf{50 \angle 50^\circ}$

b) $C_1 \cdot C_2 = (2 \angle -40^\circ)(7 \angle +120^\circ) = (2)(7) \angle -40^\circ + 120^\circ = \mathbf{14 \angle +80^\circ}$

Para multiplicar um número complexo na forma retangular por um número real, é necessário que tanto a parte real quanto a parte imaginária sejam multiplicadas por esse número. Por exemplo:

$$(10)(2 + j3) = \mathbf{20 + j30}$$

e $50 \angle 0^\circ(0 + j6) = j300 = \mathbf{300 \angle 90^\circ}$

Divisão

Para dividir dois números complexos na forma *retangular*, multiplique o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, identificando depois as partes real e imaginária do resultado. Ou seja, se:

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

então:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(X_1 + jY_1)(X_2 - jY_2)}{(X_2 + jY_2)(X_2 - jY_2)} = \frac{(X_1X_2 + Y_1Y_2) + j(X_2Y_1 - X_1Y_2)}{X_2^2 + Y_2^2}$$

e
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{X_2^2 + Y_2^2} + j \frac{X_2Y_1 - X_1Y_2}{X_2^2 + Y_2^2} \quad (14.31)$$

Se utilizarmos a sequência anterior, não é necessário memorizar essa equação. Ou seja, primeiro multiplique o numerador pelo complexo conjugado do denominador e separe as partes real e imaginária do resultado. Em seguida, divida cada uma dessas partes pela soma dos quadrados das partes real e imaginária do denominador.

EXEMPLO 14.24

a) Calcule C_1/C_2 se $C_1 = 1 + j4$ e $C_2 = 4 + j5$.
 b) Calcule C_1/C_2 se $C_1 = -4 - j8$ e $C_2 = +6 - j1$.

Soluções:

a) Pela Equação 14.31,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(1)(4) + (4)(5)}{4^2 + 5^2} + j \frac{(4)(4) - (1)(5)}{4^2 + 5^2} = \frac{24}{41} + \frac{j11}{41} \cong \mathbf{0,59 + j0,27}$$

b) Usando um método alternativo, obtemos

$$\begin{array}{r} -4 - j8 \\ +6 + j1 \\ \hline -24 - j48 \\ -j4 - j^2 8 \\ \hline -24 - j52 + 8 = -16 - j52 \\ +6 - j1 \\ +6 + j1 \\ \hline 36 + j6 \\ -j6 - j^2 1 \\ \hline 36 + 0 + 1 = 37 \end{array}$$

e
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{-16}{37} - \frac{j52}{37} = \mathbf{-0,43 - j 1,41}$$

Para dividir um número complexo na forma *retangular* por um número real, tanto a parte real quanto a parte imaginária têm de ser divididas pelo número real. Por exemplo,

$$\frac{8 + j10}{2} = \mathbf{4 + j 5}$$

e
$$\frac{6,8 - j0}{2} = 3,4 - j0 = \mathbf{3,4 \angle 0^\circ}$$

Na forma *polar*, a divisão é realizada simplesmente dividindo o módulo do numerador pelo módulo do denominador e subtraindo os respectivos ângulos. Ou seja, para

$$C_1 = Z_1 \angle \theta_1 \quad \text{e} \quad C_2 = Z_2 \angle \theta_2$$

escrevemos:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \angle \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (14.32)$$

EXEMPLO 14.25

a) Calcule C_1/C_2 se $C_1 = 15 \angle 10^\circ$ e $C_2 = 2 \angle 7^\circ$.
 b) Calcule C_1/C_2 se $C_1 = 8 \angle 120^\circ$ e $C_2 = 16 \angle -50^\circ$.
 Soluções:

a)
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{15 \angle 10^\circ}{2 \angle 7^\circ} = \frac{15}{2} \angle 10^\circ - 7^\circ = \mathbf{7,5 \angle 3^\circ}$$

b)
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{8 \angle 120^\circ}{16 \angle -50^\circ} = \frac{8}{16} \angle 120^\circ - (-50^\circ) = \mathbf{0,5 \angle 170^\circ}$$

Obtemos o *inverso* de um número complexo na forma retangular multiplicando o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador:

$$\frac{1}{X + jY} = \left(\frac{1}{X + jY} \right) \left(\frac{X - jY}{X - jY} \right) = \frac{X - jY}{X^2 + Y^2}$$

$$e \quad \frac{1}{X + jY} = \frac{X}{X^2 + Y^2} - j \frac{Y}{X^2 + Y^2} \quad (14.33)$$

Na forma polar, o recíproco é obtido assim:

$$\frac{1}{Z \angle \theta} = \frac{1}{Z} \angle -\theta \quad (14.34)$$

Para finalizar essa seção, o exemplo a seguir envolve as quatro operações básicas.

EXEMPLO 14.26

Execute as operações a seguir, deixando a resposta em forma polar ou retangular:

- a)
$$\begin{aligned} \frac{(2 + j3) + (4 + j6)}{(7 + j7) - (3 - j3)} &= \frac{(2 + 4) + j(3 + 6)}{(7 - 3) + j(7 + 3)} \\ &= \frac{(6 + j9)(4 - j10)}{(4 + j10)(4 - j10)} \\ &= \frac{[(6)(4) + (9)(10)] + j[(4)(9) - (6)(10)]}{4^2 + 10^2} \\ &= \frac{114 - j24}{116} = \mathbf{0,98 - j0,21} \end{aligned}$$
- b)
$$\begin{aligned} \frac{(50 \angle 30^\circ)(5 + j5)}{10 \angle -20^\circ} &= \frac{(50 \angle 30^\circ)(7,07 \angle 45^\circ)}{10 \angle -20^\circ} \\ &= \frac{353,5 \angle 75^\circ}{10 \angle -20^\circ} \\ &= 35,35 \angle 75^\circ - (-20^\circ) \\ &= \mathbf{35,35 \angle 95^\circ} \end{aligned}$$
- c)
$$\begin{aligned} \frac{(2 \angle 20^\circ)^2 (3 + j4)}{8 - j6} &= \frac{(2 \angle 20^\circ)(2 \angle 20^\circ)(5 \angle 53,13^\circ)}{10 \angle -36,87^\circ} \\ &= \frac{(4 \angle 40^\circ)(5 \angle 53,13^\circ)}{10 \angle -36,87^\circ} \\ &= \frac{20 \angle 93,13^\circ}{10 \angle -36,87^\circ} \\ &= 2 \angle 93,13^\circ - (-36,87^\circ) \\ &= \mathbf{2,0 \angle 130^\circ} \end{aligned}$$
- d)
$$\begin{aligned} 3 \angle 27^\circ - 6 \angle -40^\circ &= (2,673 + j1,362) - (4,596 - j3,857) \\ &= (2,673 - 4,596) + j(1,362 + 3,857) \\ &= \mathbf{-1,92 + j 5,22} \end{aligned}$$

14.11 USO DE CALCULADORAS E MÉTODOS COMPUTACIONAIS NAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

Os processos de conversão da forma retangular para a polar (e vice-versa), e os cálculos envolvendo operações extensas com números complexos podem consumir um tempo considerável e, frequentemente, gerar frustrações se um erro de sinal ou de posicionamento da vírgula invalidar o resultado. Felizmente, a tecnologia dos dias de hoje nos oferece calculadoras e métodos computacionais que tornam o processo consideravelmente mais fácil e aumentam a confiabilidade e a precisão dos resultados.

Calculadoras

A calculadora TI-89, ilustrada na Figura 14.61, é apenas uma dentre as diversas calculadoras que convertem as duas formas de números complexos entre si e realizam operações extensas envolvendo esses números de forma precisa e organizada. Não incluímos aqui todos os detalhes de operação para uma calculadora específica, pois cada uma tem um formato próprio de dados, assim como uma sequência de etapas própria. Entretanto, incluímos as operações básicas principais para demonstrar a facilidade com que as conversões podem ser feitas e o formato das operações mais complicadas.

Existem diferentes maneiras de realizar as conversões e operações a seguir, mas as instruções aqui propostas oferecem um método bastante direto. Como a maioria das operações está no modo grau (DEGREE) em vez de no



Figura 14.61 Calculadora científica TI-89. (Cortesia da Texas Instruments, Inc.)

modo radiano (RADIAN), a sequência na Figura 14.62 mostra como definir o modo DEGREE para as operações que se seguem. Uma sequência semelhante define o modo RADIAN, caso seja necessário.

Conversão de retangular para polar. A sequência na Figura 14.63 oferece uma listagem detalhada das etapas necessárias para converter a forma retangular em polar. Nos exemplos seguintes, as etapas de rolagem não foram listadas para simplificar a sequência.

Na sequência da Figura 14.63, uma rolagem para cima é escolhida após Matrix, pois esse é um percurso mais direto para Vector ops. Uma rolagem para baixo gera o mesmo resultado, mas é preciso percorrer a listagem inteira. A sequência parece um pouco longa para uma conversão tão simples, mas, com a prática, você poderá realizar as etapas de rolagem muito rapidamente. Sempre cuide para que os dados de entrada sejam digitados corretamente, como a inclusão do i após o componente y . Qualquer entrada incorreta resultará em uma listagem de erro.

MODE \downarrow Angle \rightarrow \downarrow DEGREE ENTER ENTER

Figura 14.62 Definição do modo DEGREE na calculadora TI-89.

(3 + 5 2ND i) 2ND MATH \downarrow Matrix \rightarrow
 \uparrow Vector ops \rightarrow \downarrow \blacktriangleright Polar ENTER ENTER 5.83E0 \angle 59.0E0

Figura 14.63 Conversão de $3 + j5$ na forma polar usando a calculadora TI-89.

(5 2ND \angle 5 3 \cdot 1 2ND MATH \downarrow
 Angle \rightarrow $^\circ$ ENTER) 2ND MATH \downarrow Matrix \rightarrow \uparrow Vector ops \rightarrow \downarrow
 Rect ENTER ENTER 3.00E0+4.00E0i

Figura 14.64 Conversão de $5\angle 53,1^\circ$ na forma retangular usando a calculadora TI-89.

(1 0 \angle 5 0 $^\circ$) \times (2 \angle 2 0 $^\circ$)
 \blacktriangleright Polar ENTER 20.00E0 \angle 70.00E0

Figura 14.65 Realização da operação $(10\angle 50^\circ)(2\angle 20^\circ)$.

(5 \angle 5 3 \cdot 1 $^\circ$) \times (2 + 2 i)
 \blacktriangleright Polar ENTER ENTER 14.14E0 \angle 98.10E0

Figura 14.66 Realização da operação $(5\angle 53,1^\circ)(2 + j 2)$.

Conversão de polar para retangular. A sequência na Figura 14.64 é uma listagem detalhada das etapas necessárias para converter a forma polar na forma retangular. Observe, no formato, que os parênteses precisam cercar a forma polar. Além disso, o sinal de grau precisa ser incluído com o ângulo para que o cálculo seja realizado. A resposta aparece na notação científica selecionada.

Operações matemáticas. As operações matemáticas são realizadas na ordem natural das operações, mas é preciso lembrar de selecionar o formato para a solução. Por exemplo, se a sequência na Figura 14.65 não incluísse a designação polar, a resposta seria na forma retangular, embora as duas grandezas no cálculo estejam em forma polar. No restante dos exemplos, a rolagem exigida para obter as funções matemáticas não foi incluída para diminuir o tamanho da sequência.

Para o produto de números complexos mistos, a sequência da Figura 14.66 é utilizada. Novamente, a forma polar foi selecionada para a solução.

Finalmente, o Exemplo 14.26(c) é inserido, como mostra a sequência da Figura 14.67. Observe que os resultados correspondem exatamente aos obtidos anteriormente.

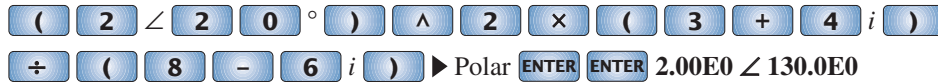


Figura 14.67 Verificação dos resultados do Exemplo 14.26(c).

14.12 FASORES

Conforme mencionado anteriormente neste capítulo, a adição de tensões e correntes senoidais é frequentemente necessária quando analisamos circuitos CA. Um método longo, porém válido, é traçar as duas formas de onda senoidais no mesmo gráfico e somar algebricamente as ordenadas em cada ponto ao longo da abscissa, como mostra a Figura 14.68 em $c = a + b$. Entretanto, esse pode ser um processo longo e tedioso com precisão limitada. Um método mais rápido usa um vetor radial girante que apareceu primeiro na Figura 13.16. Esse *vetor radial* que tem um *módulo* (comprimento) *constante* e *uma extremidade fixa na origem* é denominado **fasor** quando usado na análise de circuitos elétricos. Durante o desenvolvimento rotativo da senoide, o fasor estará, no instante $t = 0$, nas posições vistas na Figura 14.69(a) para cada uma das formas de onda mostradas na Figura 14.69(b).

Observe na Figura 14.69(b) que v_2 corta o eixo horizontal em $t = 0$ s, tornando necessário que o raio do vetor visto na Figura 14.69(a) coincida com o eixo horizontal nesse instante para garantir que a projeção vertical seja zero volt em $t = 0$ s. O seu comprimento, visto na Figura 14.69(a), é igual ao valor de pico da senoide, como exige o vetor na Figura 13.16. A outra senoide é gerada por um fasor que em $t = 0$ s já descreveu um ângulo de 90° em relação ao eixo horizontal, alcançando portanto a sua projeção vertical máxima, como mostra a Figura 14.69(a).

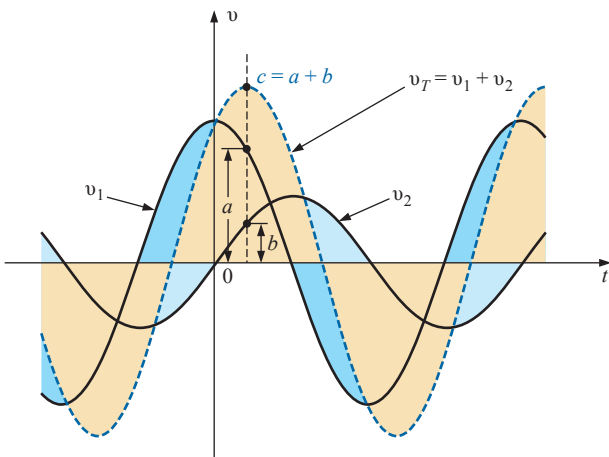


Figura 14.68 Adição ponto a ponto de duas formas de onda senoidais.

Como a projeção vertical é máxima, o valor de pico da senoide que o fasor gera também é alcançado em $t = 0$ s, conforme ilustra a Figura 14.69(b). Note também que em $t = 0$ s temos $v_T = v_1$, pois $v_2 = 0$ V nesse instante.

Usando a álgebra vetorial descrita na Seção 14.10, pode-se mostrar (veja a Figura 14.69(a)) que

$$1 \text{ V } \angle 0^\circ + 2 \text{ V } \angle 90^\circ = 2,236 \text{ V } \angle 63,43^\circ$$

Em outras palavras, se convertermos v_1 e v_2 para a forma de fasores usando

$$v = V_m \text{ sen}(\omega t \pm \theta) \Rightarrow V_m \angle \pm \theta$$

e efetuarmos a adição com o uso da álgebra dos números complexos, poderemos obter v_T , também em forma de fasor, com bastante facilidade. Podemos então converter v_T para o domínio do tempo e plotá-la no mesmo gráfico, como na Figura 14.69(b). A Figura 14.69(a), que mostra os módulos e posições relativas dos fasores envolvidos, é denominada **diagrama de fasores**. Ela é, na realidade, um valor instantâneo dos vetores girantes em $t = 0$ s.

Portanto, daqui por diante, se for necessário adicionar duas funções senoidais, deveremos primeiro convertê-las na forma fasorial e calcular a soma usando a álgebra dos números complexos. O resultado poderá ser então transformado para obtermos uma função no domínio do tempo.

O caso de duas funções senoidais que têm ângulos de fases diferentes de 0° e 90° aparece na Figura 14.70. Observe novamente que as ordenadas das funções vistas na Figura 14.70(b) em $t = 0$ s são determinadas pelas posições angulares dos vetores que vemos na Figura 14.70(a).

Como usamos quase que exclusivamente os valores rms, e não os valores de pico, na análise de circuitos CA, o fasor agora será definido, por razões práticas e de uniformidade, como tendo um módulo igual ao *valor rms* da senoide que representa. O ângulo associado com o fasor permanecerá conforme descrito anteriormente — ângulo de fase.

Em geral, em todas as análises a seguir, a forma fasorial de uma tensão ou corrente senoidal será:

$$\mathbf{V} = V \angle \theta \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = I \angle \theta$$

onde V e I são valores rms e θ é o ângulo de fase. Deve-se ressaltar que, na notação de fasores, as grandezas envol-

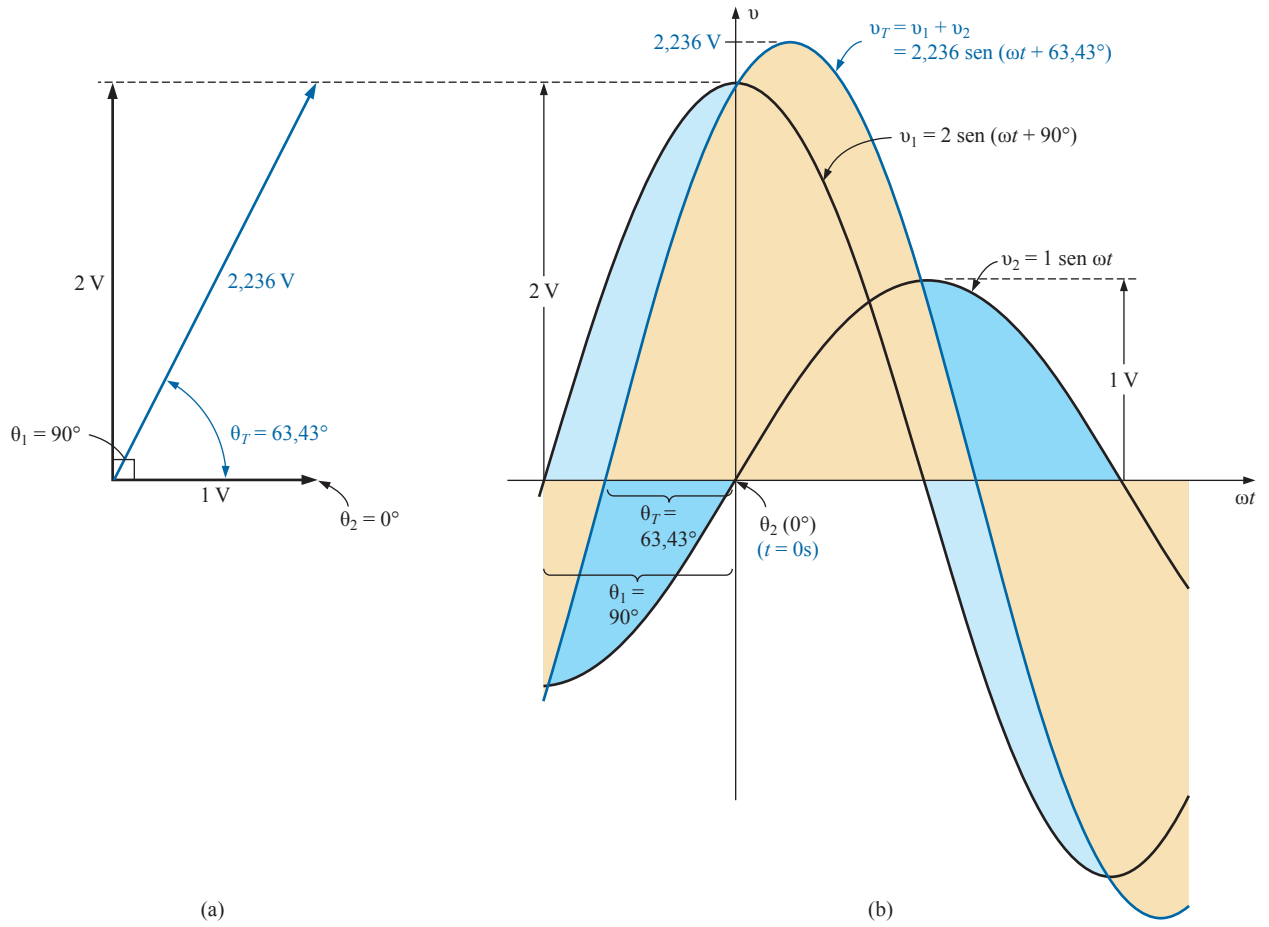


Figura 14.69 (a) Representação fasorial de formas de onda senoidais vistas na parte (b); (b) obtenção da soma de duas tensões alternadas senoidais v_1 e v_2 .

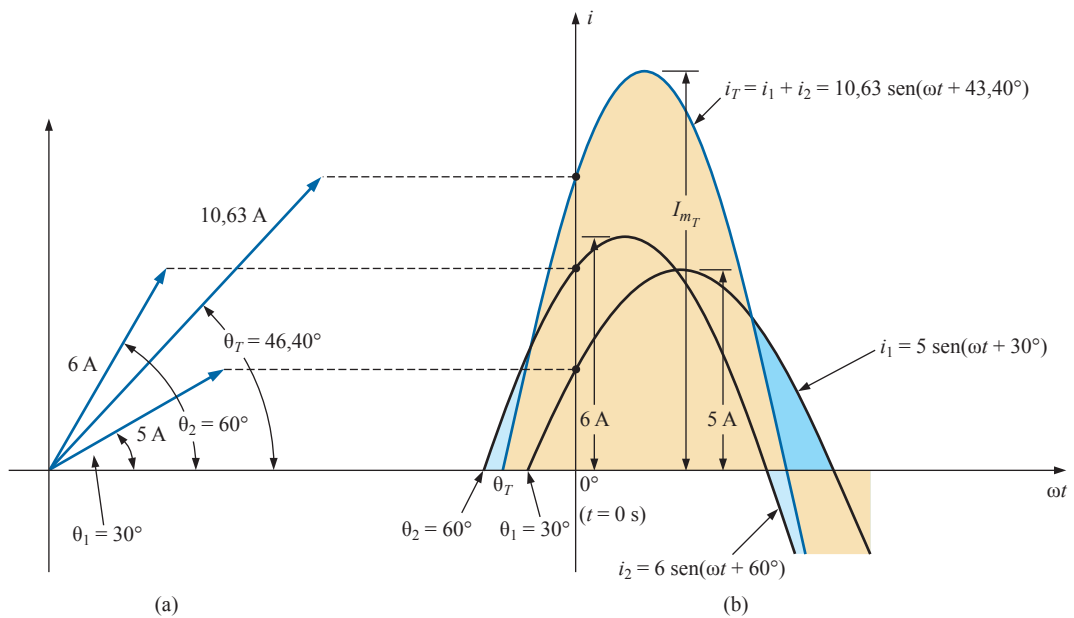


Figura 14.70 Adição de duas correntes senoidais cuja diferença de fase não é 90° .

vidas sempre variam de forma senoidal, e a frequência não é representada.

A álgebra dos fasores para grandezas senoidais pode ser aplicada somente a formas de onda senoidais de mesma frequência.

O uso da notação de fasor na análise de circuitos CA foi introduzido por Charles Proteus Steinmetz em 1897 (veja a Figura 14.71).

EXEMPLO 14.27

Converta as expressões a seguir do domínio do tempo para o domínio dos fasores:

Domínio do Tempo	Domínio dos Fasores
a) $\sqrt{2}(50) \text{ sen } \omega t$	$50 \angle 0^\circ$
b) $69,6 \text{ sen}(\omega t + 72^\circ)$	$(0,707)(69,6) \angle 72^\circ$ $= 49,21 \angle 72^\circ$
c) $45 \text{ cos } \omega t$	$(0,707)(45) \angle 90^\circ$ $= 31,82 \angle 90^\circ$

EXEMPLO 14.28

Escreva a expressão senoidal para os fasores a seguir se a frequência for 60 Hz:

Domínio do Tempo	Domínio dos Fasores
a) $I = 10 \angle 30^\circ$	$i = \sqrt{2}(10) \text{ sen}(2\pi 60t + 30^\circ)$ e $i = 14,14 \text{ sen}(377t + 30^\circ)$
b) $V = 115 \angle -70^\circ$	$v = \sqrt{2}(115) \text{ sen}(377t - 70^\circ)$ e $v = 162,6 \text{ sen}(377t - 70^\circ)$

EXEMPLO 14.29

Calcule a tensão de entrada no circuito visto na Figura 14.72 se

$$\left. \begin{aligned} v_a &= 50 \text{ sen}(377t + 30^\circ) \\ v_b &= 30 \text{ sen}(377t + 60^\circ) \end{aligned} \right\} f = 60 \text{ Hz}$$

Solução:

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões, temos:

$$e_{in} = v_a + v_b$$

Passando do domínio do tempo para o domínio dos fasores, temos:

$$\begin{aligned} v_a &= 50 \text{ sen}(377t + 30^\circ) \Rightarrow V_a = 35,35 \text{ V } \angle 30^\circ \\ v_b &= 30 \text{ sen}(377t + 60^\circ) \Rightarrow V_b = 21,21 \text{ V } \angle 60^\circ \end{aligned}$$

Passando da forma polar para a retangular a fim de poder efetuar a adição, temos:

$$\begin{aligned} V_a &= 35,35 \text{ V } \angle 30^\circ = 30,61 \text{ V} + j17,68 \text{ V} \\ V_b &= 21,21 \text{ V } \angle 60^\circ = 10,61 \text{ V} + j18,37 \text{ V} \end{aligned}$$



Figura 14.71 Charles Proteus Steinmetz. (Cortesia da Biblioteca do Congresso, Washington, EUA.)

Alemão-Americano (Breslau, Alemanha; Yonkers e Schenectady, NY, Estados Unidos) (1865-1923). **Matemático, Cientista, Engenheiro, Inventor, Professor de Engenharia Elétrica e Eletrofísica**, Union College. **Chefe de Departamento**, General Electric Co.

Embora tenha sido detentor de cerca de 200 patentes e reconhecido mundialmente por suas contribuições ao estudo das perdas por histerese e dos transitórios elétricos, Charles Proteus Steinmetz é mais conhecido por suas contribuições ao estudo de circuitos de corrente alternada. Seu ‘método simbólico para cálculos envolvendo corrente alternada’ forneceu uma abordagem à análise de circuitos de corrente alternada que eliminou boa parte da confusão e da frustração que atingia os engenheiros daquela época, quando passavam do estudo dos circuitos CC para os circuitos CA. Seu método (no qual se baseia a notação de fasores usada neste livro) permitiu uma análise direta de sistemas CA usando muitos dos teoremas e métodos de análise desenvolvidos para circuitos de corrente contínua. Em 1897, publicou o livro *Theory and calculation of alternating current phenomena*, que se tornou a ‘bíblia’ dos engenheiros que atuavam nessa área. Steinmetz era carinhosamente conhecido como ‘Doutor’ na General Electric Company, onde trabalhou por cerca de 30 anos em vários setores. Sua fama de ‘gênio polivalente’ é reforçada pelo fato de ter sido amigo de pessoas como Albert Einstein, Guglielmo Marconi e Thomas A. Edison, para citar apenas alguns. Foi presidente do American Institute of Electrical Engineers (AIEE) e da National Association of Corporation Schools, tendo ainda participado ativamente da comunidade onde residia (Schenectady) como presidente do Conselho de Educação e da Comissão de Planejamento e Parques da Cidade.

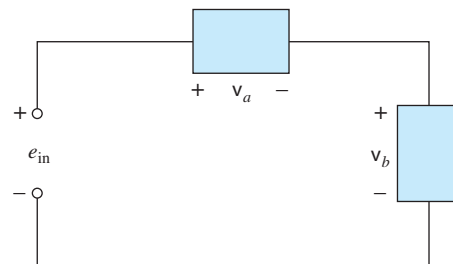


Figura 14.72 Exemplo 14.29.

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{in} &= \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b \\ &= (30,61 \text{ V} + j17,68 \text{ V}) + (10,61 \text{ V} + j18,37 \text{ V}) \\ &= 41,22 \text{ V} + j36,05 \text{ V} \end{aligned}$$

Passando da forma retangular para a polar, temos:

$$\mathbf{E}_{in} = 41,22 \text{ V} + j36,05 \text{ V} = 54,76 \text{ V} \angle 41,17^\circ$$

Convertendo o domínio fasorial em domínio do tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{in} = 54,76 \text{ V} \angle 41,17^\circ &\Rightarrow e_{in} \\ &= \sqrt{2}(54,76) \text{ sen}(377t + 41,17^\circ) \end{aligned}$$

e
$$e_{in} = 77,43 \text{ sen}(377t + 41,17^\circ)$$

Um gráfico contendo três formas de onda é visto na Figura 14.73. Observe que em cada instante a soma das duas formas de onda realmente coincide com e_{in} . Em $t = 0$ ($\omega t = 0$), e_{in} é a soma de dois valores positivos, enquanto para um valor de ωt quase a meio caminho entre $\pi/2$ e π , a soma do valor positivo de v_a com o valor negativo de v_b resulta em $e_{in} = 0$.

EXEMPLO 14.30

Determine a corrente i_2 para o circuito mostrado na Figura 14.74.

Solução:

Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes, obtemos

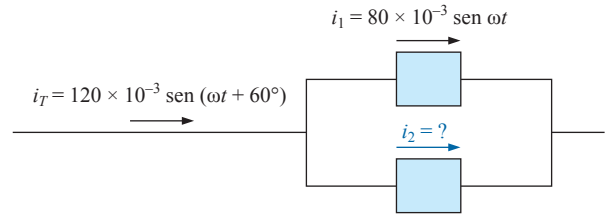


Figura 14.74 Exemplo 14.30.

$$i_T = i_1 + i_2 \quad \text{ou} \quad i_2 = i_T - i_1$$

Passando agora do domínio do tempo para o domínio dos fasores, temos:

$$\begin{aligned} i_T &= 120 \times 10^{-3} \text{ sen}(\omega t + 60^\circ) \Rightarrow 84,84 \text{ mA} \angle 60^\circ \\ i_1 &= 80 \times 10^{-3} \text{ sen} \omega t \Rightarrow 56,56 \text{ mA} \angle 0^\circ \end{aligned}$$

Convertendo a forma polar na forma retangular para efetuar a subtração, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T &= 84,84 \text{ mA} \angle 60^\circ = 42,42 \text{ mA} + j 73,47 \text{ mA} \\ \mathbf{I}_1 &= 56,56 \text{ mA} \angle 0^\circ = 56,56 \text{ mA} + j 0 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_T - \mathbf{I}_1 \\ &= (42,42 \text{ mA} + j 73,47 \text{ mA}) - (56,56 \text{ mA} + j 0) \end{aligned}$$

e
$$\mathbf{I}_2 = -14,14 \text{ mA} + j 73,47 \text{ mA}$$

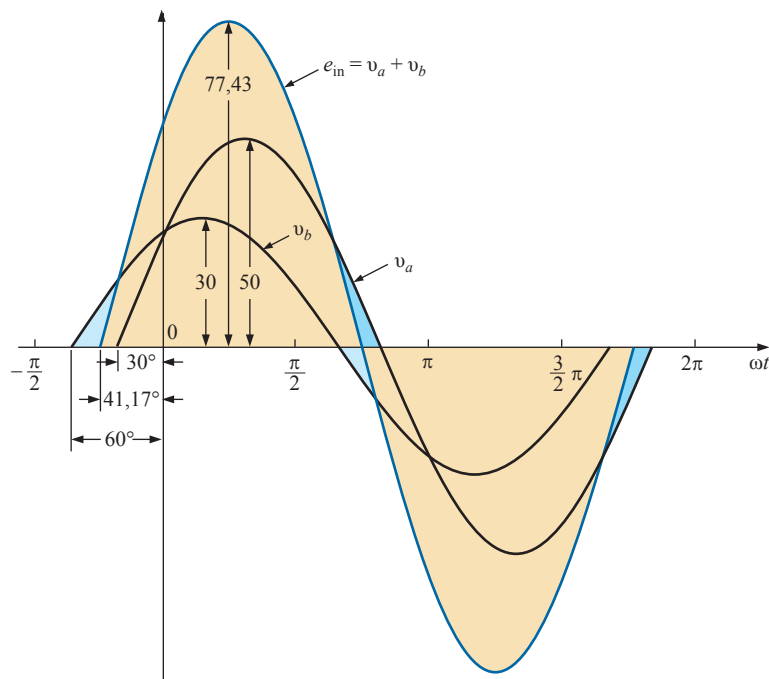


Figura 14.73 Solução para o Exemplo 14.29.

Passando da forma retangular para a polar, temos:

$$I_2 = 74,82 \text{ mA} \angle 100,89^\circ$$

Passando do domínio fasorial para o domínio do tempo, temos

$$i_2 = 74,82 \text{ mA} \angle 100,89^\circ \Rightarrow$$

$$i_2 = \sqrt{2}(74,82 \times 10^{-3}) \text{ sen}(\omega t + 100,89^\circ)$$

e $i_2 = 105,8 \times 10^{-3} \text{ sen}(\omega t + 100,89^\circ)$

As três formas de onda estão ilustradas na Figura 14.75. Vemos claramente que $i_T = i_1 + i_2$.

14.13 ANÁLISE COMPUTACIONAL

PSpice

Capacitores e resposta CA. O mais simples dos circuitos capacitivos em corrente alternada será analisado agora para apresentar o processo de configuração de uma fonte CA e de execução do processo de simulação de transitórios em corrente alternada. A fonte CA, vista na Figura 14.76, é obtida através do botão **Place part-SOURCE-VSIN-OK**. O nome e o valor de qualquer parâmetro pode ser alterado com um simples duplo clique sobre o parâmetro na tela ou por meio de um duplo clique sobre o símbolo da fonte para obter a caixa de diálogo **Property Editor**. Dentro da caixa de diálogo, defina os valores que aparecem na Figura 14.76. Isso é feito rolando pela caixa de diálogo e selecionando a quantidade desejada a partir

da listagem no topo. Quando selecionada, uma caixa preta aparecerá sob a quantidade de interesse. Clique na caixa preta e ela passará a ser branca. Digite o valor seguido por **Display-Name and Value**, se quiser que a quantidade e seu valor apareçam na tela. Se não quiser que isso apareça na tela, não use a opção **Display**. Quando cada quantidade for definida, o passo mais importante de todos deverá ser aplicado, que é selecionar o botão **Apply**. Se você se esquecer de aplicar as mudanças, nenhuma delas será usada na análise.

O processo de simulação é iniciado selecionando **New Simulation Profile** e, em **New Simulation**, inserindo o nome **PSpice 14-1** no campo **Name** seguido do botão **Create**. Na caixa de diálogo **Simulation Settings**, selecione a aba **Analysis** e escolha **Time Domain (Transient)** em **Analysis type**. O parâmetro **Run to time** deve ser ajustado em 3 ms para permitir a visualização de três ciclos das formas de onda senoidais ($T = 1/f = 1/1.000 \text{ Hz} = 1 \text{ ms}$). **Start saving data after** deve ser mantido em 0 s e **Maximum step size** deve ser $3 \text{ ms}/1.000 = 3 \mu\text{s}$. Clique em **OK** e, em seguida, selecione o ícone **Run PSpice**, e isso resultará em um gráfico com um eixo horizontal que se estende de 0 a 3 ms.

Agora, temos de informar ao computador em quais formas de onda estamos interessados. Primeiro, temos que dar uma olhada na fonte CA aplicada selecionando **Trace-Add Trace-V(Vs:+)** seguido do botão **OK**. O resultado é a forma de onda da tensão alternada que aparece na região inferior da tela mostrada na Figura 14.77. Note que ela

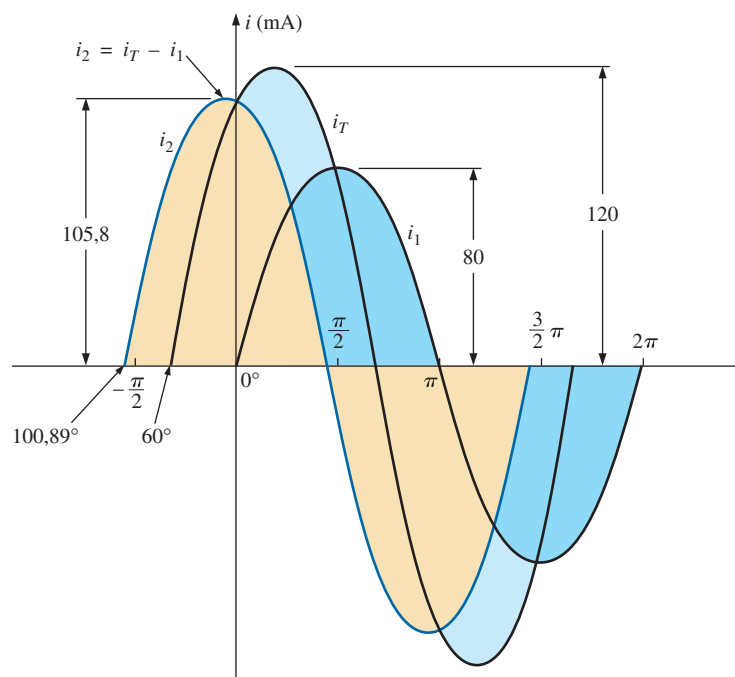


Figura 14.75 Solução para o Exemplo 14.30.

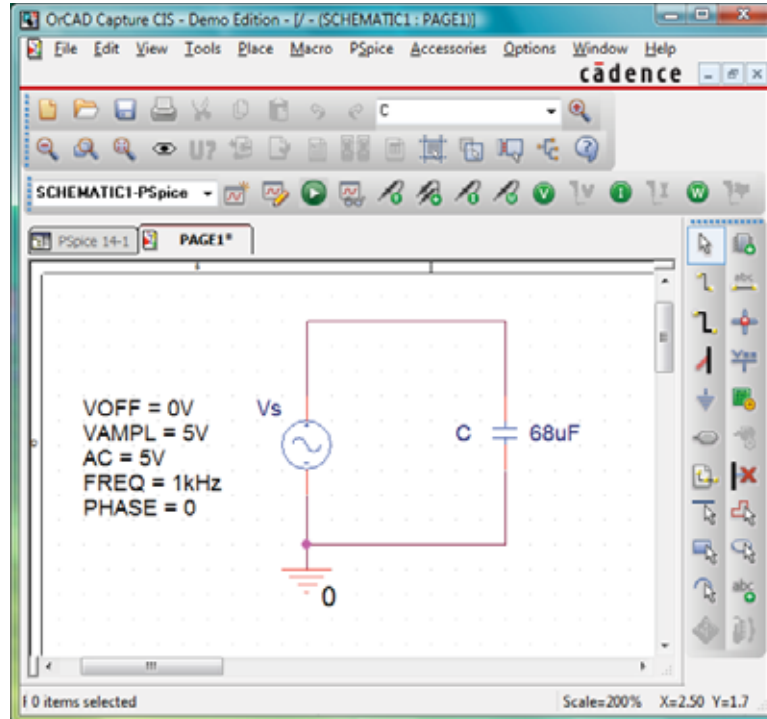


Figura 14.76 Uso do PSpice na análise da resposta de um capacitor a um sinal alternado senoidal.

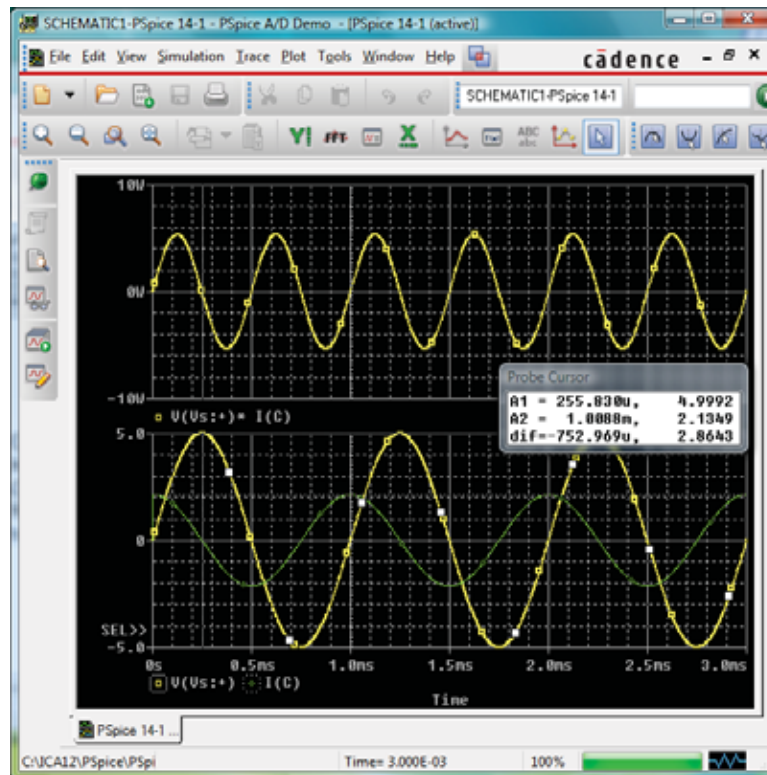


Figura 14.77 Gráficos da tensão, corrente e potência para o capacitor visto na Figura 14.76.

tem um valor de pico de 5 V e três ciclos aparecem em um tempo de 3 ms. A forma de onda da corrente no capacitor pode ser acrescentada ao gráfico selecionando **Trace-Add Trace** e escolhendo **I(C)** seguido do botão **OK**. O resultado é a forma de onda de **I(C)** que aparece com um deslocamento de fase de 90° a partir da tensão aplicada, sendo a corrente adiantada em relação à tensão (a corrente já está no valor de pico enquanto a tensão cruza o eixo em 0 V). Como o valor de pico de cada curva está na mesma faixa de valor, o valor 5 que aparece na escala vertical pode ser usado para ambas. Por meio de uma análise teórica, teríamos $X_C = 2,34\Omega$, e o valor de pico de $I_C = E/X_C = 5\text{ V}/2,34 = 2,136\text{ A}$, conforme mostra a Figura 14.77.

Para praticar, vamos obter a curva da potência fornecida para o capacitor ao longo do mesmo período de tempo. Primeiro selecione **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace** para obter a caixa de diálogo **Add Traces**. Então, escolha **V(Vs:*)** seguido de um asterisco (*) para multiplicação, e termine selecionando **I(C)**. O resultado é a expressão **V (Vs:*)*I(C)** no formato de potência: $p = vi$. Clique em **OK** e a curva da potência, vista na parte superior da Figura 14.77, aparecerá. Note que, ao longo dos três ciclos, as áreas acima e abaixo do eixo são iguais — não há uma transferência de potência ao longo de um intervalo de 3 ms. Note também que a curva da potência é senoidal (que é muito interessante) com o dobro da frequência do sinal aplicado. Usando o cursor, podemos determinar que a potência máxima (valor de pico da forma de onda senoidal) é 5,34 W. Os cursores, na realidade, foram acrescentados às curvas da parte inferior para mostrar os valores de pico da senoide aplicada e da corrente resultante.

Após a seleção do ícone **Toggle cursor**, clique com o botão esquerdo do mouse em torno de **V(Vs:*)** na parte

de baixo da curva com uma linha tracejada para mostrar que o cursor está fornecendo os níveis daquela grandeza. Quando colocado a $\frac{1}{4}$ do período total, ou seja, 250 μs (A1), o valor de pico é exatamente 5 V, como mostra a caixa de diálogo **Probe Cursor**. Colocando o cursor sobre o símbolo próximo a **I(C)**, na parte de baixo do gráfico, e clicando com o botão direito do mouse o cursor direito para a corrente será designado. Colocá-lo exatamente a 1 ms (A2) resultará em um valor de pico de 2,136 A, coincidindo com o valor calculado anteriormente. Para facilitar a distinção entre as curvas de tensão e a corrente, a cor e a espessura das linhas das curvas foram alteradas. Coloque o cursor da direita sobre a curva e clique com o botão direito do mouse. Em seguida, a opção **Properties** aparecerá. Quando **Properties** é selecionada, a caixa de diálogo **Trace Properties** aparece, na qual a cor amarela (yellow) pode ser selecionada e a largura aumentada para melhorar a visibilidade sobre o fundo preto. Você pode escolher o amarelo para **Vs** e o verde para **I(C)**. Observe também que o eixo e a grade tiveram suas cores alteradas para tons mais visíveis por meio do mesmo procedimento.

Multisim

Como o PSpice revisou a resposta de um dispositivo capacitivo a uma tensão CA, o Multisim repete a análise para um dispositivo indutivo. A fonte de tensão CA foi derivada da aba **Place Source**, conforme descrito no Capítulo 13, com os valores que aparecem na Figura 14.78 definidos na caixa de diálogo **AC-Voltage**.

Quando o circuito tiver sido construído, a sequência **Simulate-Analyses-Transient Analysis** resultará em uma caixa de diálogo **Transient Analysis** em que **Start time** é definida em 0 s e **End time** em 105 ms. Os 105 ms foram definidos como **End time** para dar ao circuito 100 ms para

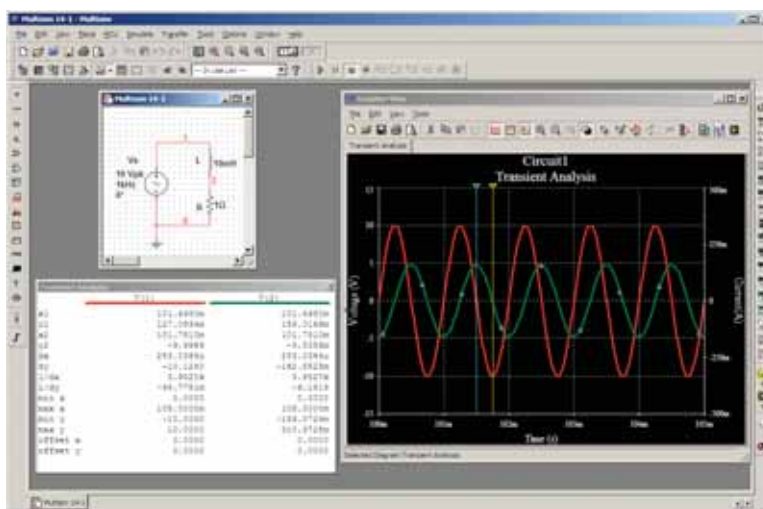


Figura 14.78 Uso do Multisim para rever a resposta de um dispositivo indutivo a um sinal alternado senoidal.

se estabelecer em seu modo de estado constante e 5 ms para cinco ciclos na tela de saída. **Minimum number of time points** foi definido em 10.000, para garantir uma boa exibição para as formas de onda que mudam rapidamente.

Em seguida, o cabeçalho **Output** foi escolhido dentro da caixa de diálogo e a tensão da fonte **V(1)** e a corrente da fonte **I(VS)** foram movidos de **Variables in Circuit** para **Selected variables for analysis** usando a opção **Add**. A escolha de **Simulate** resulta em uma forma de onda que se estende de 0 s a 105 ms. Embora planejem salvar apenas a resposta que ocorre após 100 ms, o computador não conhece nosso interesse, e desenha a resposta para o período inteiro. Isso é corrigido selecionando o botão **Properties** na barra de ferramentas no alto do gráfico (ele se parece com uma etiqueta e um lápis) para obter a caixa de diálogo **Graph Properties**. A seleção de **Bottom Axis** permite a definição de **Range** desde um **Minimum of 0.100 s = 100 ms** até um **Maximum of 0.105 s = 105 ms**. Clique em **OK** e o período de tempo da Figura 14.78 será exibido. A estrutura de grade é acrescentada selecionando o botão **Show Grid**, e a cor associada a cada curva é exibida se escolhermos o botão **Show Legend** ao seu lado.

Pelo gráfico, fica claro que a escala para a corrente da fonte precisa ser melhorada para que possamos ler seus valores de pico e negativo com clareza. Isso é feito primeiro clicando na curva **I(VS)** para definir o **Selected Trace** na parte inferior do gráfico como **I(VS)**. Um clique do botão direito possibilita a escolha da opção **Trace Properties** para obter a caixa de diálogo **Graph Pro-**

erties. Sob **Y-Vertical Axis**, selecione **Right Axis** para estabelecer o eixo direito como a escala a ser usada para a corrente da fonte. Depois, selecione **Right Axis** e insira a **Label: Current(A)**, selecione **Enabled** no cabeçalho **Axis** e finalmente escolha **Pen Size** como 1. A **Scale** é **Linear** e o intervalo é $-500E-3$ a $500E-3$ (-500 mA a 500 mA), com **Total Ticks** de 8 e **Minor Ticks** de 2. O resultado é o gráfico da Figura 14.78. O eixo da direita agora pode ser melhorado selecionando **Graph Properties** novamente, seguido por **Left Axis**, onde a **Current(A)** pode ser excluída. Podemos agora ver que a corrente da fonte tem um valor de pico de aproximadamente 160 mA. Para obter mais detalhes sobre as formas de onda, selecione o botão **Show Cursors** para obter a caixa de diálogo **Transient Analysis** com as caixas **V(1)** e **I(VS)** listadas com os mesmos cabeçalhos coloridos que foram usados no gráfico. Clicando em um dos cursores e movendo-o na horizontal para o valor máximo da corrente resultará em **x1 = 101,0 ms**, com **y1** em 158,91 mA. Na realidade, o **max y** aparece abaixo, em 159,07 mA, e poderia ter sido obtido se tivéssemos aumentado o número de pontos de dados. Mover o outro cursor para encontrar o valor mínimo da corrente resultará em **x2 = 101,24 ms**, com **y2** em 2,51 mA (o mais próximo do valor 1 possível com essa definição de nível). O valor máximo de **V(1)** aparece abaixo, como 10V, como deveria ser, e a distância entre o valor máximo de **I(VS)** e seu valor mínimo é **dx = 242,91 μs**, que é muito próximo de 0,25 ms, ou um quarto do período do sinal aplicado.

PROBLEMAS

Seção 14.2 A derivada

1. Faça o gráfico da expressão a seguir em função do tempo para um período completo. Em seguida, determine a derivada da função usando a Equação 14.1 e plote um ciclo completo da derivada no mesmo gráfico que a função original. Compare o valor da derivada em vários pontos em função da inclinação da função senoidal original.

$$v = 1 \text{ sen } 6,28t$$

2. Repita o Problema 1 para a função senoidal a seguir e compare os resultados. Determine as frequências das formas de onda nos Problemas 1 e 2 e compare os valores das derivadas.

$$v = 1 \text{ sen } 314,2t$$

3. Qual é a derivada de cada uma das expressões senoidais a seguir?

a) $10 \text{ sen } 377t$	c) $\sqrt{2} 20 \text{ sen}(157t - 20^\circ)$
b) $0,6 \text{ sen}(200t + 20^\circ)$	d) $-200 \text{ sen}(t + 180^\circ)$

Seção 14.3 Resposta dos dispositivos básicos R , L e C a uma tensão ou a uma corrente senoidal

4. As expressões a seguir representam a tensão em um resistor de 3Ω . Determine a expressão senoidal para a corrente. Além disso, esboce as formas de onda de v e i no mesmo gráfico.

a) $150 \text{ sen } 200t$	c) $6 \text{ cos}(\omega t + 10^\circ)$
b) $30 \text{ sen}(377t + 20^\circ)$	d) $-12 \text{ sen}(\omega t + 40^\circ)$
5. As expressões a seguir representam a corrente em um resistor de $7 \text{ k}\Omega$. Obtenha a expressão senoidal para a tensão. Além disso, esboce as formas de onda de v e i no mesmo gráfico.

a) $0,1 \text{ sen } 1000t$	b) $2 \times 10^{-3} \text{ sen}(400t - 120^\circ)$
------------------------------------	--
6. Determine a reatância indutiva (em ohms) de um indutor de 2 mH no caso de

a) Corrente contínua	e) para as seguintes frequências:
b) 60 Hz	b) 60 Hz
c) 4 kHz	c) 4 kHz
d) $1,2 \text{ MHz}$	d) $1,2 \text{ MHz}$

7. Determine a indutância de um indutor cuja reatância é:
- $2 \text{ k}\Omega$ em $f = 14,47 \text{ kHz}$.
 - $40 \text{ k}\Omega$ em $f = 5,3 \text{ kHz}$.
8. Determine a frequência para a qual um indutor de 1 mH apresenta as seguintes reatâncias indutivas:
- 10Ω
 - $4 \text{ k}\Omega$
 - $12 \text{ k}\Omega$
9. A seguir, são dadas as expressões para a corrente em uma reatância indutiva de 20Ω . Qual é a expressão senoidal para a tensão em cada caso? Plote as formas de onda senoidais de v e i no mesmo gráfico.
- $i = 5 \text{ sen } \omega t$
 - $i = 40 \times 10^{-3} \text{ sen}(\omega t + 60^\circ)$
 - $i = -6 \text{ sen}(\omega t - 30^\circ)$
10. A seguir, é dada a expressão da corrente em uma bobina de $0,1 \text{ H}$. Qual é a expressão senoidal para a tensão em cada caso?
- $10 \text{ sen } 100t$
 - $5 \times 10^{-6} \text{ sen}(400t + 20^\circ)$
11. A tensão em uma reatância indutiva de 50Ω é dada pelas expressões a seguir. Qual a expressão senoidal para a corrente? Esboce as formas de onda de v e i no mesmo gráfico.
- $120 \text{ sen } t$
 - $30 \text{ sen}(\omega t + 20^\circ)$
12. As expressões a seguir são relativas à tensão em um indutor de $0,2 \text{ H}$. Qual é a expressão senoidal para a corrente em cada caso?
- $1,5 \text{ sen } 60t$
 - $16 \times 10^{-3} \text{ sen}(10t + 2^\circ)$
13. Calcule a reatância capacitiva (em ohms) de um capacitor de $5 \mu\text{F}$ em
- Corrente contínua
 - 60 Hz
 - 2 kHz
 - 2 MHz
14. Determine o valor padrão mais próximo da capacitância que possui uma reatância de:
- 60Ω em $f = 265 \text{ Hz}$.
 - $1,2 \text{ k}\Omega$ em $f = 34 \text{ kHz}$.
15. Determine as frequências para as quais um capacitor de $3,9 \mu\text{F}$ apresenta as seguintes reatâncias capacitivas:
- 10Ω
 - $1,2 \text{ k}\Omega$
 - $0,1 \Omega$
 - 2.000Ω
16. A tensão em uma reatância capacitiva de $2,5 \Omega$ é dada a seguir. Qual a expressão senoidal para a corrente em cada caso? Esboce as formas de onda de v e i no mesmo gráfico.
- $120 \text{ sen } \omega t$
 - $4 \times 10^{-3} \text{ sen}(\omega t + 40^\circ)$
17. A seguir, são apresentadas as expressões para a tensão aplicada em um capacitor de $1 \mu\text{F}$. Qual a expressão senoidal para a corrente em cada caso?
- $30 \text{ sen } 200t$
 - $60 \times 10^{-3} \text{ sen } 377t$
18. As expressões a seguir se referem à corrente em uma reatância capacitiva de 10Ω . Determine as expressões senoidais para a tensão em cada caso. Esboce as formas de onda de v e i no mesmo gráfico.
- $i = 50 \times 10^{-3} \text{ sen } \omega t$
 - $i = 2 \times 10^{-6} \text{ sen}(\omega t + 60^\circ)$
19. Algumas expressões para a corrente em um capacitor de $0,56 \mu\text{F}$ são dadas a seguir. Qual é, em cada caso, a expressão para a tensão no capacitor?
- $0,20 \text{ sen } 300t$
 - $8 \times 10^{-3} \text{ sen}(377t - 30^\circ)$
- *20. No caso dos pares de expressões para tensão e corrente dados a seguir, indique se o dispositivo envolvido é um capacitor, um indutor ou um resistor e os valores de C , L e R caso os dados sejam suficientes:
- $v = 550 \text{ sen}(377t + 50^\circ)$
 $i = 11 \text{ sen}(377t - 40^\circ)$
 - $v = 36 \text{ sen}(754t - 80^\circ)$
 $i = 4 \text{ sen}(754t - 170^\circ)$
 - $v = 10,5 \text{ sen}(\omega t - 13^\circ)$
 $i = 1,5 \text{ sen}(\omega t - 13^\circ)$
- *21. Repita o Problema 20 utilizando os seguintes pares de tensão e corrente:
- $v = 2.000 \text{ sen } \omega t$
 $i = 5 \text{ cos } \omega t$
 - $v = 80 \text{ sen}(157t + 150^\circ)$
 $i = 2 \text{ sen}(157t + 60^\circ)$
 - $v = 35 \text{ sen}(\omega t - 20^\circ)$
 $i = 7 \text{ cos}(\omega t - 110^\circ)$

Seção 14.4 Respostas em frequência dos dispositivos básicos

22. Faça o gráfico de X_L em função da frequência para um indutor de 3 mH , de zero a 100 kHz , usando uma escala linear.
23. Faça o gráfico de X_C em função da frequência para um capacitor de $1 \mu\text{F}$, de zero a 10 kHz , utilizando uma escala linear.
24. Em que frequência a reatância de um capacitor de $1 \mu\text{F}$ é igual à resistência de um resistor de $2 \text{ k}\Omega$?
25. A reatância de um indutor é igual à resistência de um resistor de $10 \text{ k}\Omega$ na frequência de 5 kHz . Qual é a indutância do indutor?
26. Determine a frequência na qual um capacitor de $1 \mu\text{F}$ e um indutor de 10 mH têm a mesma reatância.
27. Determine o valor da capacitância necessária para termos uma reatância capacitiva de mesmo valor que a de uma bobina de 2 mH em 50 kHz .

Seção 14.5 Potência média e fator de potência

- *28. Calcule a perda média de potência e o fator de potência para os circuitos nos quais a corrente e a tensão de entrada são dadas pelas expressões a seguir:
- $v = 60 \text{ sen}(\omega t + 30^\circ)$
 $i = 15 \text{ sen}(\omega t + 60^\circ)$
 - $v = -50 \text{ sen}(\omega t - 20^\circ)$
 $i = -2 \text{ sen}(\omega t - 20^\circ)$
 - $v = 50 \text{ sen}(\omega t + 80^\circ)$
 $i = 3 \text{ cos}(\omega t - 20^\circ)$
 - $v = 75 \text{ sen}(\omega t - 5^\circ)$
 $i = 0,08 \text{ sen}(\omega t + 35^\circ)$
29. Se a corrente em um dispositivo for dada por $i = 8 \text{ sen}(\omega t + 40^\circ)$ e a tensão aplicada ao dispositivo for $v = 48 \text{ sen}(\omega t + 40^\circ)$, calcule a potência pelas expressões $I^2 R$, $(V_m I_m / 2) \cos \theta$ e $VI \cos \theta$ e compare os resultados.
30. Um circuito dissipa 100 W (potência média) a 150 V (tensão de entrada efetiva) e 2 A (corrente de entrada efetiva). Qual é o fator de potência? Repita o problema para uma potência de 0 W e 300 W .

- *31. O fator de potência de um circuito é de 0,5 atrasado. A potência dissipada é 500 W. Se a tensão de entrada é dada por $v = 50 \text{ sen}(\omega t + 10^\circ)$, determine a expressão senoidal para a corrente de entrada.
- 32. Na Figura 14.79, $e = 30 \text{ sen}(2\pi 60t + 20^\circ)$.
 - a) Qual é a expressão senoidal para a corrente?
 - b) Calcule a dissipação de potência no circuito.
 - c) Qual o tempo necessário, em segundos, para que a corrente complete seis ciclos?
- 33. Na Figura 14.80, $e = 128 \text{ sen}(1000t + 60^\circ)$.
 - a) Determine a expressão senoidal para a corrente i .
 - b) Calcule o valor da indutância L . Qual é o seu valor-padrão provável em mH?
 - c) Determine a dissipação de potência média no indutor.
- 34. Na Figura 14.81, $i = 30 \times 10^{-3} \text{ sen}(2\pi 500t - 20^\circ)$.
 - a) Determine a expressão senoidal para e .
 - b) Determine o valor da capacitância C em microfarads. Qual é o valor-padrão provável em μF ?
 - c) Determine a dissipação média de potência no capacitor.
- *35. Para o circuito da Figura 14.82 e o sinal aplicado:
 - a) Determine as expressões senoidais para i_1 e i_2 .
 - b) Determine a expressão senoidal para i_s combinando os dois capacitores paralelos.

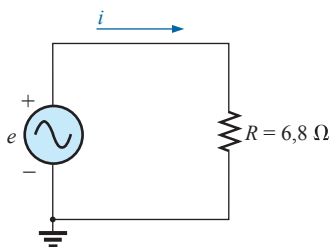


Figura 14.79 Problema 32.

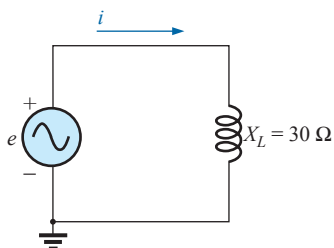


Figura 14.80 Problema 33.

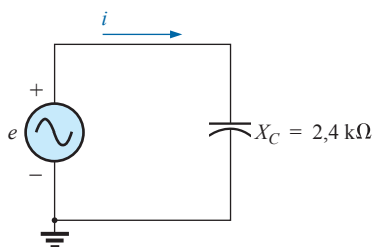


Figura 14.81 Problema 34.

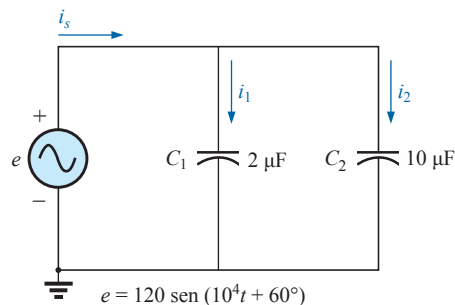


Figura 14.82 Problema 35.

- *36. Para o circuito da Figura 14.83 e o sinal aplicado:
 - a) Determine a expressão senoidal para a tensão da fonte v_s .
 - b) Determine a expressão senoidal para as correntes i_1 e i_2 .

Seção 14.9 Conversão entre as duas formas

- 37. Converta os seguintes números na forma polar.

a) $4 + j3$	d) $1000 + j50$
b) $2 + j2$	e) $-1.000 + j4000$
c) $4 + j12$	f) $-0,4 + j0,08$
- *38. Converta os seguintes números na forma polar.

a) $-8 - j16$	d) $-6 \times 10^{-3} - j6 \times 10^{-3}$
b) $+8 - j4$	e) $200 + j0,02$
c) $0,02 - j0,003$	f) $-1000 + j20$
- 39. Converta os seguintes números na forma retangular.

a) $6 \angle 40^\circ$	d) $0,0064 \angle +200^\circ$
b) $12 \angle 120^\circ$	e) $48 \angle 2^\circ$
c) $2000 \angle -90^\circ$	f) $5 \times 10^{-4} \angle -20^\circ$
- 40. Converta os seguintes números na forma retangular.

a) $42 \angle 0,15^\circ$	d) $8 \times 10^{-3} \angle -220^\circ$
b) $2002 \angle -60^\circ$	e) $15 \angle +180^\circ$
c) $0,006 \angle -120^\circ$	f) $1,2 \angle -89,9^\circ$

Seção 14.10 Operações matemáticas com números complexos

- 41. Efetue as seguintes adições em forma retangular:
 - a) $(4,2 + j6,8) + (7,6 + j0,2)$
 - b) $(142 + j7) + (9,8 + j42) + (0,1 + j0,9)$
 - c) $(4 \times 10^{-6} + j76) + (7,2 \times 10^{-7} - j5)$
- 42. Efetue as seguintes subtrações em forma retangular:
 - a) $(9,8 + j6,2) - (4,6 + j4,6)$
 - b) $(167 + j243) - (-42,3 - j68)$
 - c) $(-36,0 + j78) - (-4 - j6) + (10,8 - j72)$

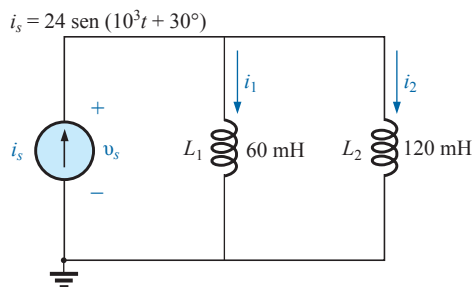


Figura 14.83 Problema 36.

43. Efetue as seguintes operações com números polares e deixe a resposta em forma polar:
- $6 \angle 20^\circ + 8 \angle 80^\circ$
 - $42 \angle 45^\circ + 62 \angle 60^\circ - 70 \angle 120^\circ$
 - $20 \angle -120^\circ - 10 \angle -150^\circ + 8 \angle -210^\circ + 8 \angle +240^\circ$
44. Efetue as seguintes multiplicações em forma retangular:
- $(2 + j3)(6 + j8)$
 - $(7,8 + j1)(4 + j2)(7 + j6)$
 - $(400 - j200)(-0,01 - j0,5)(-1 + j3)$
45. Efetue as seguintes multiplicações em forma polar:
- $(2 \angle 60^\circ)(4 \angle -40^\circ)$
 - $(6,9 \angle 8^\circ)(7,2 \angle -72^\circ)$
 - $(0,002 \angle 120^\circ)(0,5 \angle 200^\circ)(40 \angle +80^\circ)$
46. Efetue as seguintes divisões em forma polar:
- $(42 \angle 10^\circ)/(7 \angle 60^\circ)$
 - $(0,006 \angle 120^\circ)/(30 \angle +60^\circ)$
 - $(4.360 \angle -20^\circ)/(40 \angle -210^\circ)$
47. Efetue as seguintes divisões e deixe a resposta em forma retangular:
- $(8 + j8)/(2 + j2)$
 - $(8 + j42)/(-6 - j4)$
 - $(-4,5 - j6)/(0,1 - j0,8)$
- *48. Efetue as operações a seguir e expresse as respostas em forma retangular:
- $\frac{(4 + j3) + (6 - j8)}{(3 + j3) - (2 + j3)}$
 - $\frac{8 \angle 60^\circ}{(2 \angle 0^\circ) + (100 + j400)}$
 - $\frac{(6 \angle 20^\circ)(120 \angle -40^\circ)(3 + j8)}{2 \angle -30^\circ}$
- *49. Efetue as operações a seguir e expresse as respostas em forma polar:
- $\frac{(0,4 \angle 60^\circ)^2 (300 \angle 40^\circ)}{3 + j9}$
 - $\left(\frac{1}{(0,02 \angle 10^\circ)^2} \right) \left(\frac{2}{j} \right)^3 \left(\frac{1}{6^2 - j\sqrt{900}} \right)$
- *50. a) Determine uma solução para x e y se
 $(x + j4) + (3x + jy) - j7 = 16 \angle 0^\circ$
 b) Determine x se
 $(10 \angle 20^\circ)(x \angle -60^\circ) = 30,64 - j25,72$
- *51. a) Determine uma solução para x e y se
 $(5x + j10)(2 - jy) = 90 - j70$
 b) Determine θ se
 $\frac{80 \angle 0^\circ}{20 \angle \theta} = 3,464 - j2$

Seção 14.12 Fasores

52. Escreva as expressões a seguir na forma de fasores:
- $\sqrt{2}(160) \text{ sen}(\omega t + 30^\circ)$
 - $\sqrt{2}(25 \times 10^{-3}) \text{ sen}(157t - 40^\circ)$
 - $100 \text{ sen}(\omega t - 90^\circ)$
- *53. Escreva as expressões a seguir na forma de fasores:
- $20 \text{ sen}(377t - 180^\circ)$
 - $6 \times 10^{-6} \cos \omega t$
 - $3,6 \times 10^{-6} \cos(754t - 20^\circ)$

54. Expresse os seguintes fasores relativos a correntes e tensões senoidais de 60 Hz.
- $I = 40 \text{ A } \angle 20^\circ$
 - $V = 120 \text{ V } \angle 10^\circ$
 - $I = 8 \times 10^{-3} \text{ A } \angle -110^\circ$
 - $V = \frac{6000}{\sqrt{2}} \text{ V } \angle -180^\circ$

55. Para o sistema mostrado na Figura 14.84, determine a expressão senoidal para a tensão desconhecida v_a sabendo que:

$$e_{in} = 60 \text{ sen}(377t + 45^\circ)$$

$$v_b = 20 \text{ sen}(377t - 45^\circ)$$

56. Para o sistema mostrado na Figura 14.85, determine a expressão senoidal para a corrente desconhecida i_1 sabendo que:

$$i_s = 20 \times 10^{-6} \text{ sen}(\omega t + 60^\circ)$$

$$i_2 = 6 \times 10^{-6} \text{ sen}(\omega t - 30^\circ)$$

57. Determine a expressão senoidal para a tensão v_a no sistema visto na Figura 14.86 se

$$e_{in} = 120 \text{ sen}(\omega t + 30^\circ)$$

$$v_b = 30 \text{ sen}(\omega t + 60^\circ)$$

$$v_c = 40 \text{ sen}(\omega t + 120^\circ)$$

- *58. Determine a expressão senoidal para a corrente i_1 no circuito da Figura 14.87 sabendo que

$$i_s = 18 \times 10^{-3} \text{ sen}(377t + 180^\circ)$$

$$i_2 = 8 \times 10^{-3} \text{ sen}(377t - 180^\circ)$$

$$i_3 = 2i_2$$

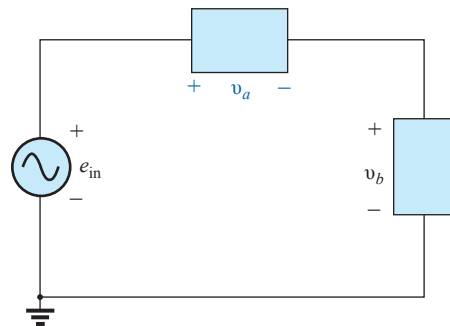


Figura 14.84 Problema 55.

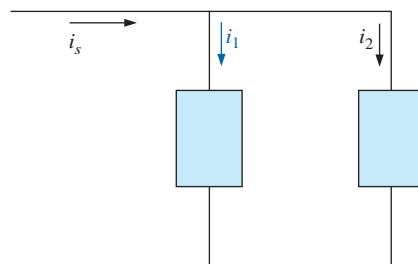


Figura 14.85 Problema 56.

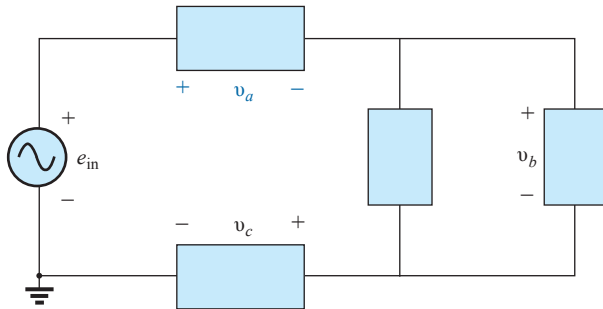


Figura 14.86 Problema 57.

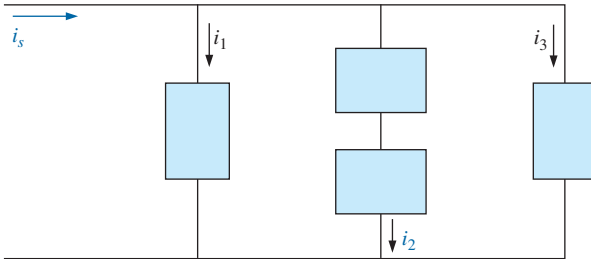


Figura 14.87 Problema 58.

Seção 14.13 Análise computacional

PSpice ou Multisim

- 59. Faça o gráfico de i_C e v_C em função do tempo para o circuito mostrado na Figura 14.76 para dois ciclos da frequência de 0,2 kHz.
- 60. Faça o gráfico da magnitude e do ângulo de fase da corrente i_C em função da frequência (100 Hz a 100 kHz) para o circuito visto na Figura 14.76.
- *61. Faça o gráfico da impedância total da configuração do circuito mostrado na Figura 14.27(a) em função da frequência (100 kHz a 100 MHz) para os seguintes valores dos parâmetros: $C = 0,1 \mu\text{F}$, $L_s = 0,2 \mu\text{H}$, $R_s = 2 \text{M}\Omega$ e $R_p = 100 \text{M}\Omega$. Para qual faixa de frequência o capacitor é ‘capacitivo’?

Glossário

- Complexo conjugado:** Número complexo obtido a partir da troca de sinal da componente imaginária de um número complexo na forma retangular.
- Derivada:** Taxa instantânea de variação de uma função em relação ao tempo ou outra variável independente.
- Diagrama de fasores:** Representação ‘instantânea’ dos fasores que representam formas de onda senoidais em $t = 0$ s.
- Fasor:** Vetor radial que tem um módulo constante a um determinado ângulo a partir do eixo real positivo e que representa uma tensão ou uma corrente senoidal no domínio do vetor.
- Fator de potência (F_p):** Indicação de quanto um sistema elétrico é reativo ou resistivo. Quanto maior o fator de potência, maior a componente resistiva.
- Fator de potência adiantado e atrasado:** Indicação da condição de que um circuito é capacitivo ou indutivo por natureza. Os fatores de potência adiantados estão associados a circuitos capacitivos, e os atrasados, a circuitos indutivos.

- Forma polar:** Método que define um ponto em um plano complexo através de um módulo, que representa a distância da origem, e um ângulo, que expressa a distância do eixo real positivo no sentido horário.
- Forma retangular:** Método de definir um ponto em um plano complexo através dos valores das componentes real e imaginária, sendo esta última associada à letra j .
- Número complexo:** Número que representa um ponto em um plano bidimensional referenciado a dois eixos distintos. Ele define um vetor desenhado da origem até o ponto.
- Potência média ou real:** Potência fornecida a uma carga e por ela dissipada em um período completo.
- Reatância:** Oposição de um indutor ou de um capacitor à corrente que resulta em uma troca contínua de energia entre o circuito e o campo magnético de um indutor ou entre o circuito e o campo elétrico de um capacitor.
- Recíproco:** Forma que é definida por 1 dividido pelo número complexo.