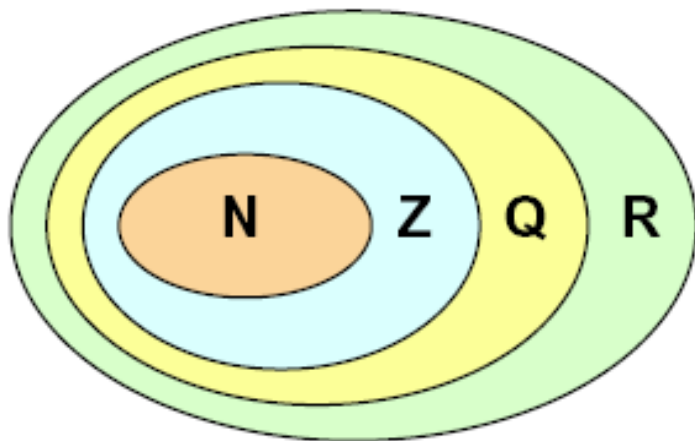


Plano cartesiano complexo

- Conjunto dos Números Naturais: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Conjunto dos Números Inteiros: $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$
- Conjunto dos Números Racionais: $\mathbf{Q} = \{x / x = \frac{p}{q}; p \text{ e } q \in \mathbf{Z} \text{ e } q \neq 0\}$
- Conjunto dos Números Reais: $\mathbf{R} = \{\text{racionais e irracionais}\}$



$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

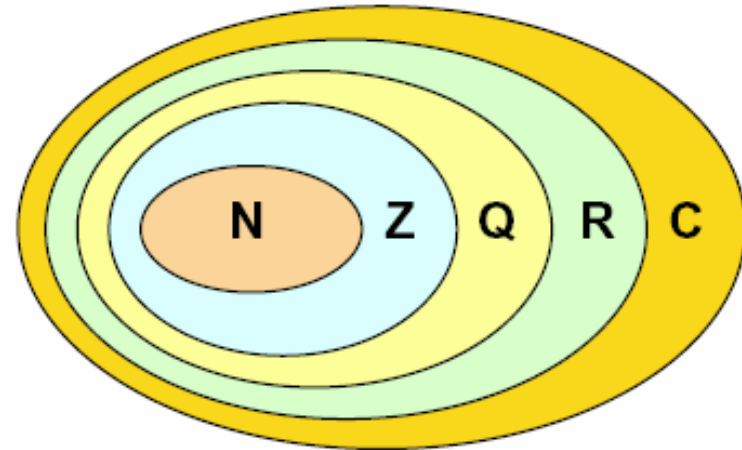
$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Para resolver este problema:

$$j^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad j = \sqrt{-1}$$

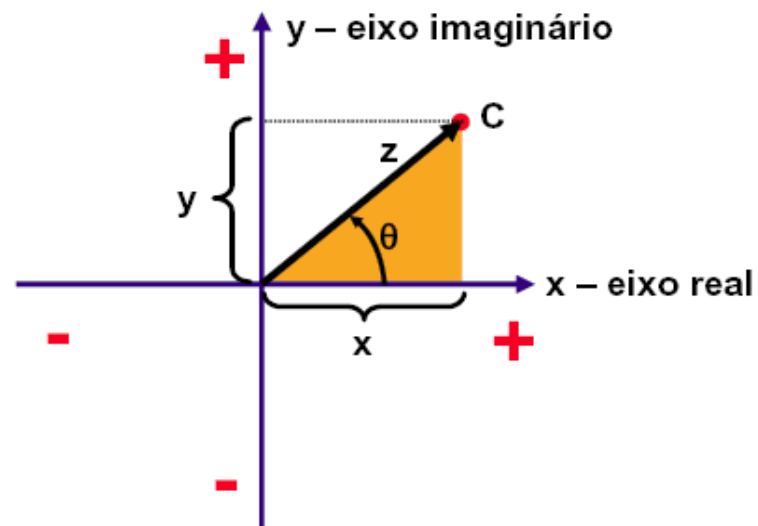
Plano cartesiano complexo

Conjunto dos números complexos:



Um número imaginário está deslocado de 90° de um número real no plano cartesiano.

Um número complexo é um ponto no plano cartesiano complexo.



Forma retangular ou cartesiana

Um número complexo na Forma Retangular (ou Cartesiana) é composto por uma parte real e uma parte imaginária

$$C = x + jy$$

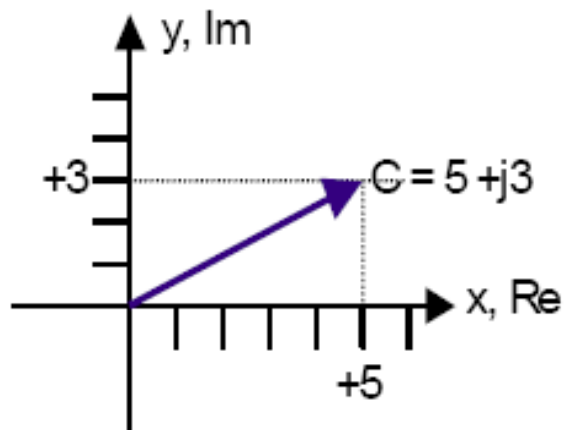
C – número complexo na forma retangular;

x – projeção no eixo x (abscissa) referente à parte real;

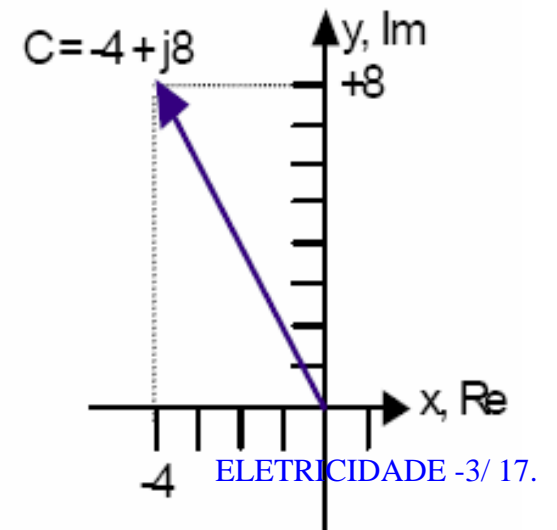
y – projeção no eixo y (ordenada) referente à parte imaginária.

Exemplos:

$$C = 5 + j3$$



$$C = -4 + j8$$



Forma polar

Um número complexo na Forma Polar é um número composto por um vetor e um ângulo.

$$C = z \angle \theta$$

C - número complexo na forma polar;

z – módulo (comprimento) do vetor radial desde a origem até o ponto ($z > 0$);

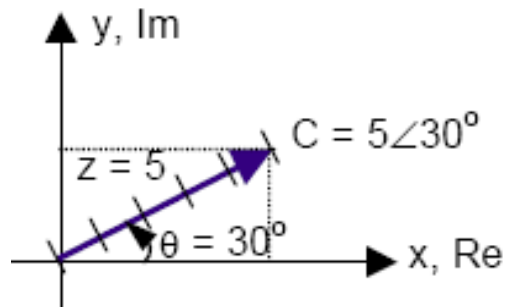
θ - argumento (ângulo) do vetor desde o eixo horizontal, medido no sentido anti-horário.

Ângulos positivos (+) são medidos no sentido anti-horário a partir do eixo horizontal x.

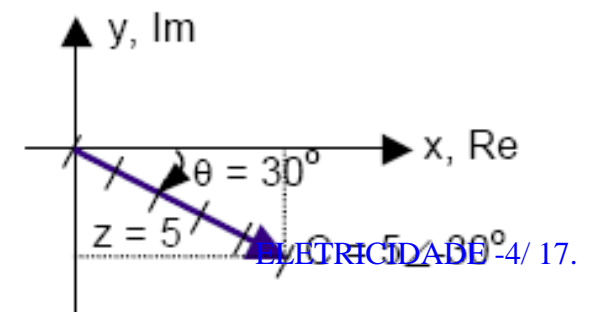
Ângulos negativos (-) são medidos no sentido horário a partir do eixo horizontal x.

Exemplos:

$$C = 5 \angle 30^\circ$$



$$C = 5 \angle -30^\circ$$



Conversão entre formas

Conversão de retangular para polar:

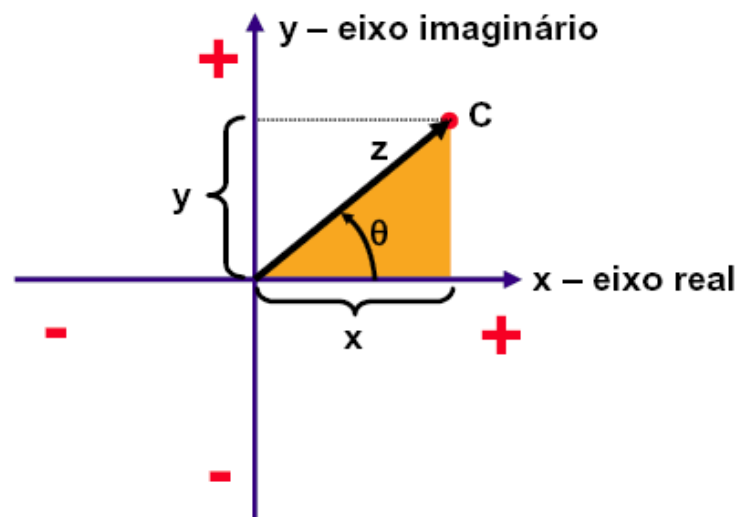
$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad C = z \angle \theta = \sqrt{x^2 + y^2} \angle \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right]$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplos: $C = 60 + j80$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$



$$z = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{80}{60} \right) = 53,13^\circ$$

$$C = 100 \angle 53,13^\circ$$

Plano cartesiano complexo

Conversão de polar para retangular:

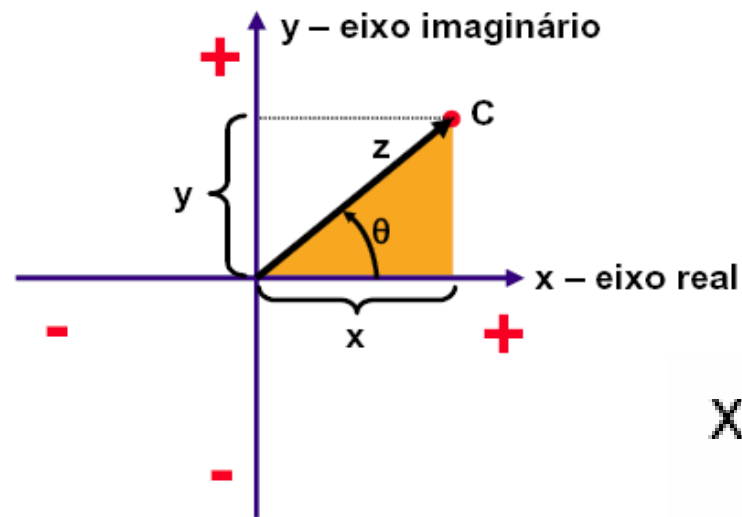
$$\cos \theta = \frac{x}{z}$$

$$x = z \cdot \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{z}$$

$$y = z \cdot \sin \theta$$

$$C = x + jy = z \cdot \cos \theta + j(z \cdot \sin \theta)$$



Exemplos:

$$C = 200 \angle 45^\circ$$

$$x = 200 \cdot \cos 45^\circ = 141,42$$

$$y = 200 \cdot \sin 45^\circ = 141,42$$

$$C = 141,42 + j141,42$$

Operações com números complexos

Lembrar que:

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$j^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \left(\frac{j}{j}\right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

Operações com números complexos

Conjugado complexo:

$$C = x + jy = z \angle \theta$$

$$C^* = x - jy = z \angle -\theta$$

Exemplos:

$$\text{a) } C = 5 + j7 \quad \Rightarrow \quad C^* = 5 - j7$$

$$\text{b) } C = 100 \angle -30^\circ \quad \Rightarrow \quad C^* = 100 \angle +30^\circ$$

Adição e subtração de números complexos

Soma e Subtração algébrica de números complexos são feitas na forma retangular.

Somam-se ou subtraem-se algebricamente as partes reais e as partes imaginárias, separadamente.

$$C_1 + C_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$C_1 - C_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Exemplos:

$$(3 + j4) + (5 + j6) = (3 + 5) + (j4 + j6) = 8 + j10$$

$$(3 + j4) - (5 + j6) = (3 - 5) + (j4 - j6) = -2 - j2$$

Multiplicação e divisão de números complexos

Multiplicação de números complexos é feita na forma polar.

$$C_1 \cdot C_2 = z_1 \cdot z_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

Divisão de números complexos é feita na forma polar.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{z_1 \angle \theta_1}{z_2 \angle \theta_2} = \frac{z_1}{z_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

Exemplos:

$$10 \angle 45^\circ \times 20 \angle 30^\circ = 10 \times 20 \angle (45^\circ + 30^\circ) = 200 \angle 75^\circ$$

$$10 \angle 45^\circ / 20 \angle 30^\circ = 10 / 20 \angle (45^\circ - 30^\circ) = 0,5 \angle 15^\circ$$

Representação fasorial

- Tensão instantânea: $v(t) = V_p \cdot \text{sen}(w.t \pm \theta_v)$
- Corrente instantânea: $i(t) = I_p \cdot \text{sen}(w.t \pm \theta_i)$

Calcular a potência para: $v(t)=10\text{sen}(100t)$ $i(t)=2\text{sen}(100t-60^\circ)$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 10\text{sen}(100t) \cdot 2\text{sen}(100t + 60^\circ) = 20 \cdot \text{sen}(100t) \cdot \text{sen}(100t + 60^\circ)$$

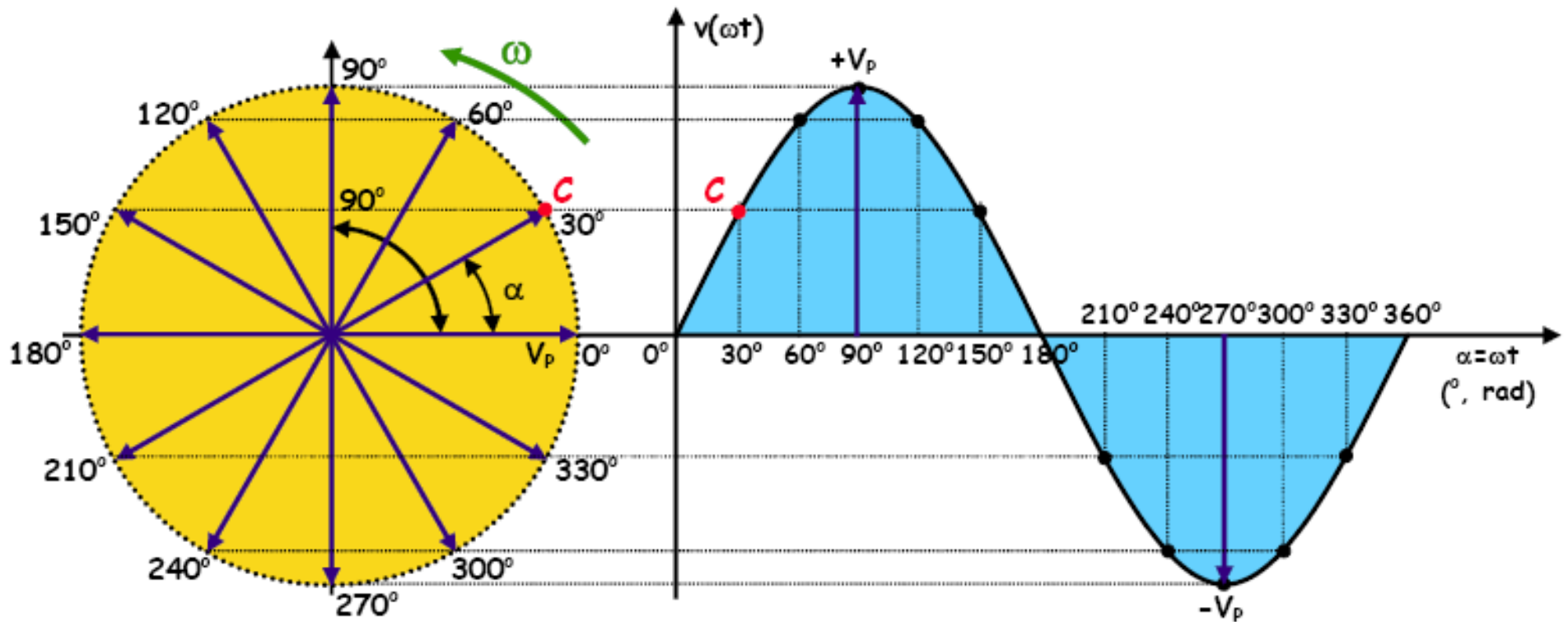
$$\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$p(t) = 20 \cdot \text{sen}(100t) \cdot \text{sen}(100t + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(100t - 100t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(100t + 100t + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right) \right] = 0,5 \cdot \left[0,5 - \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right) \right] = -0,25 \cos\left(200t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Fasores

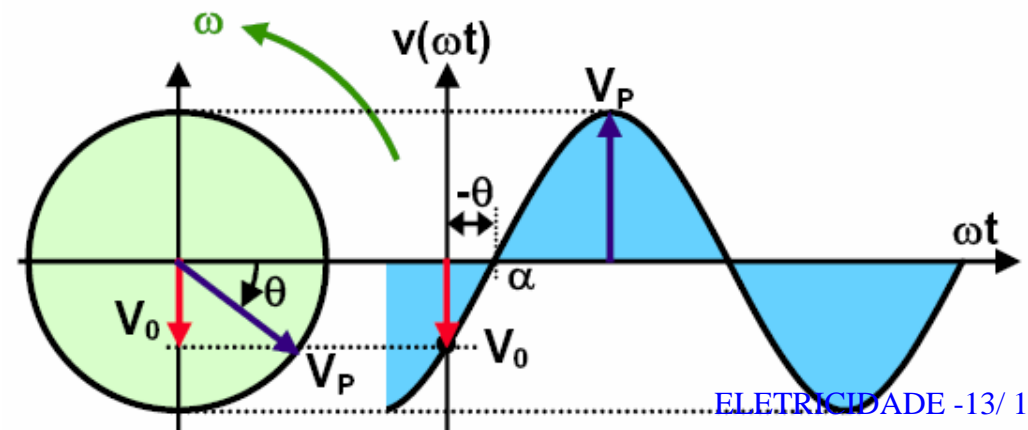
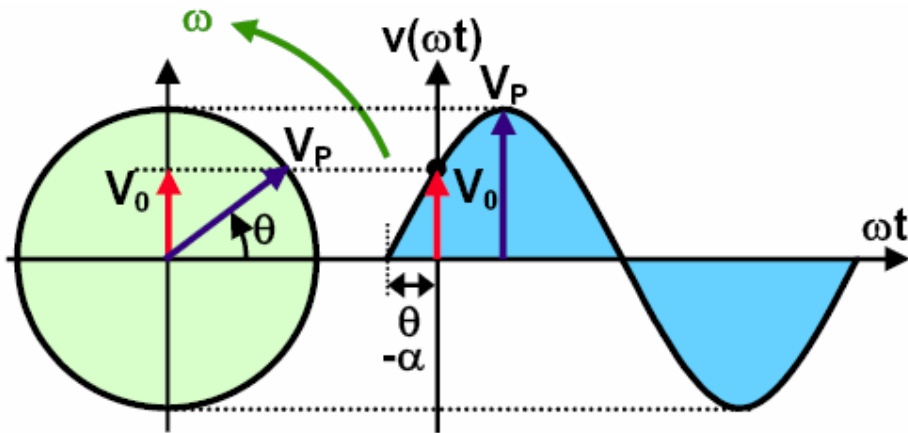
Um movimento harmônico giratório pode ser descrito por uma senóide e vice-versa.



Fasores

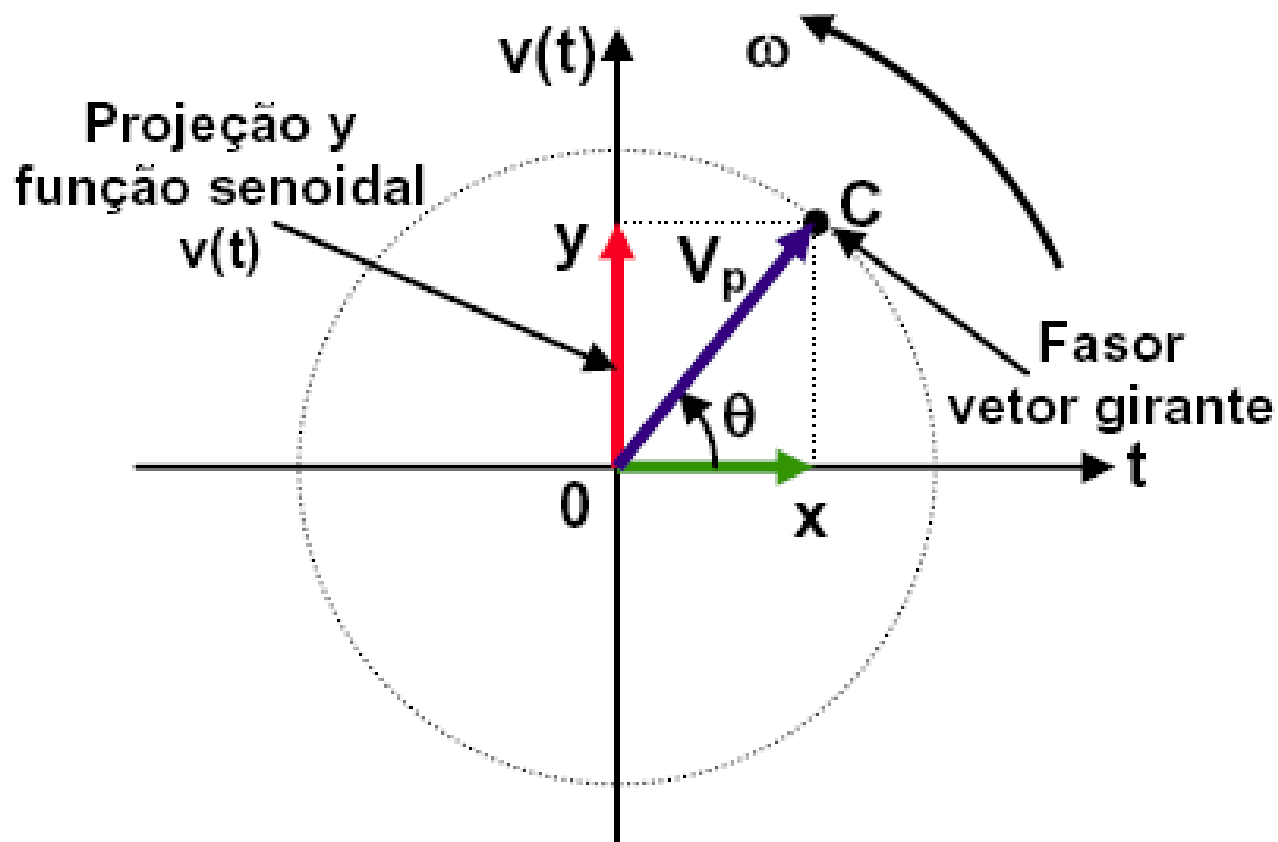
Uma senóide pode ser descrita por um vetor radial girante com módulo igual à sua amplitude (valor de pico) e mesma frequência angular ω

A cada período ou ciclo completado o vetor radial girante está sempre na mesma posição angular inicial θ .



Fasores

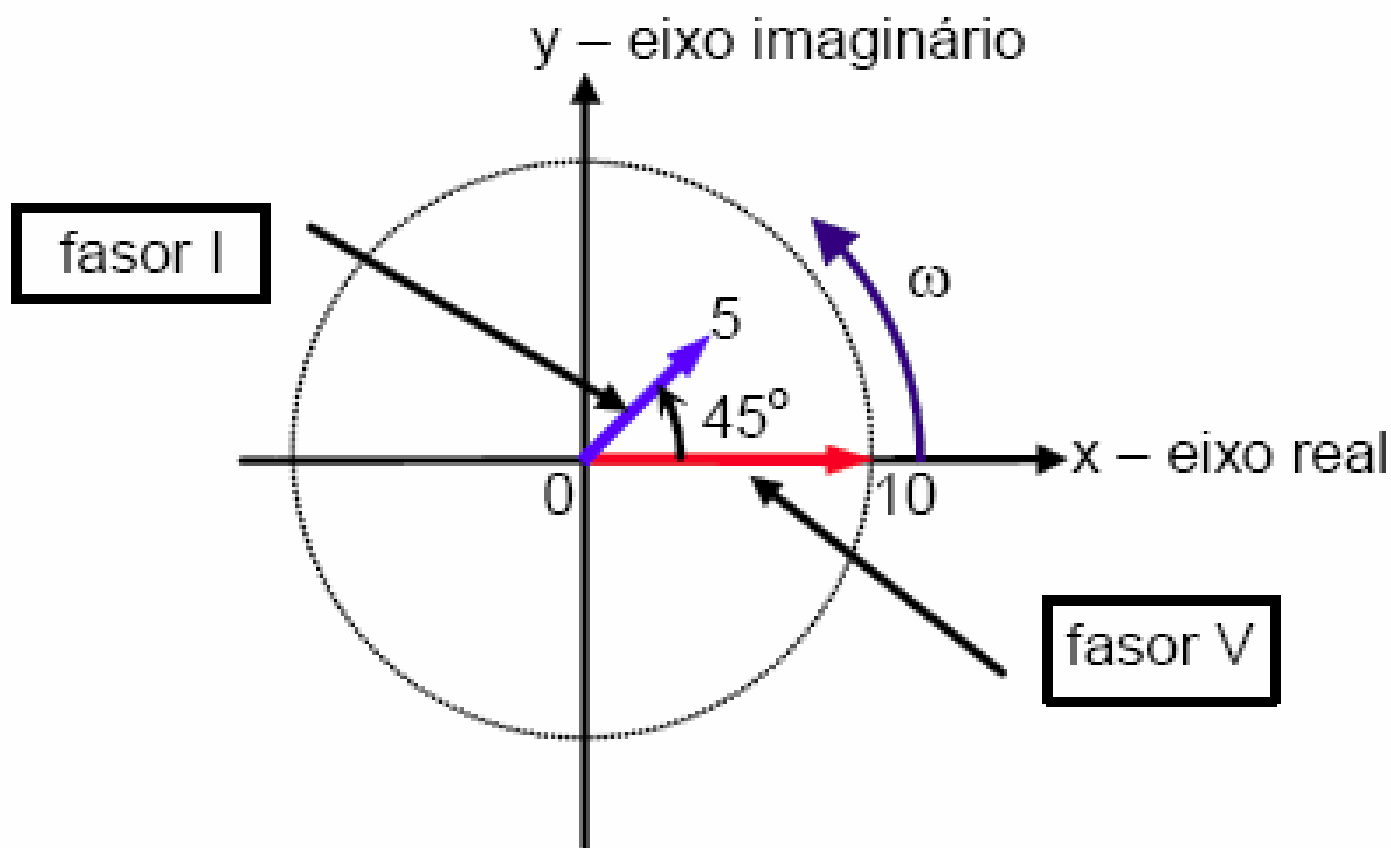
Fasor é um vetor radial girante com frequência ω , com módulo igual ao valor de pico V_p e com ângulo de fase inicial θ , que representa uma senóide de iguais parâmetros.



Fasores

$$v(t) = 10.\text{sen}(100t + 0^\circ) \text{ V}$$

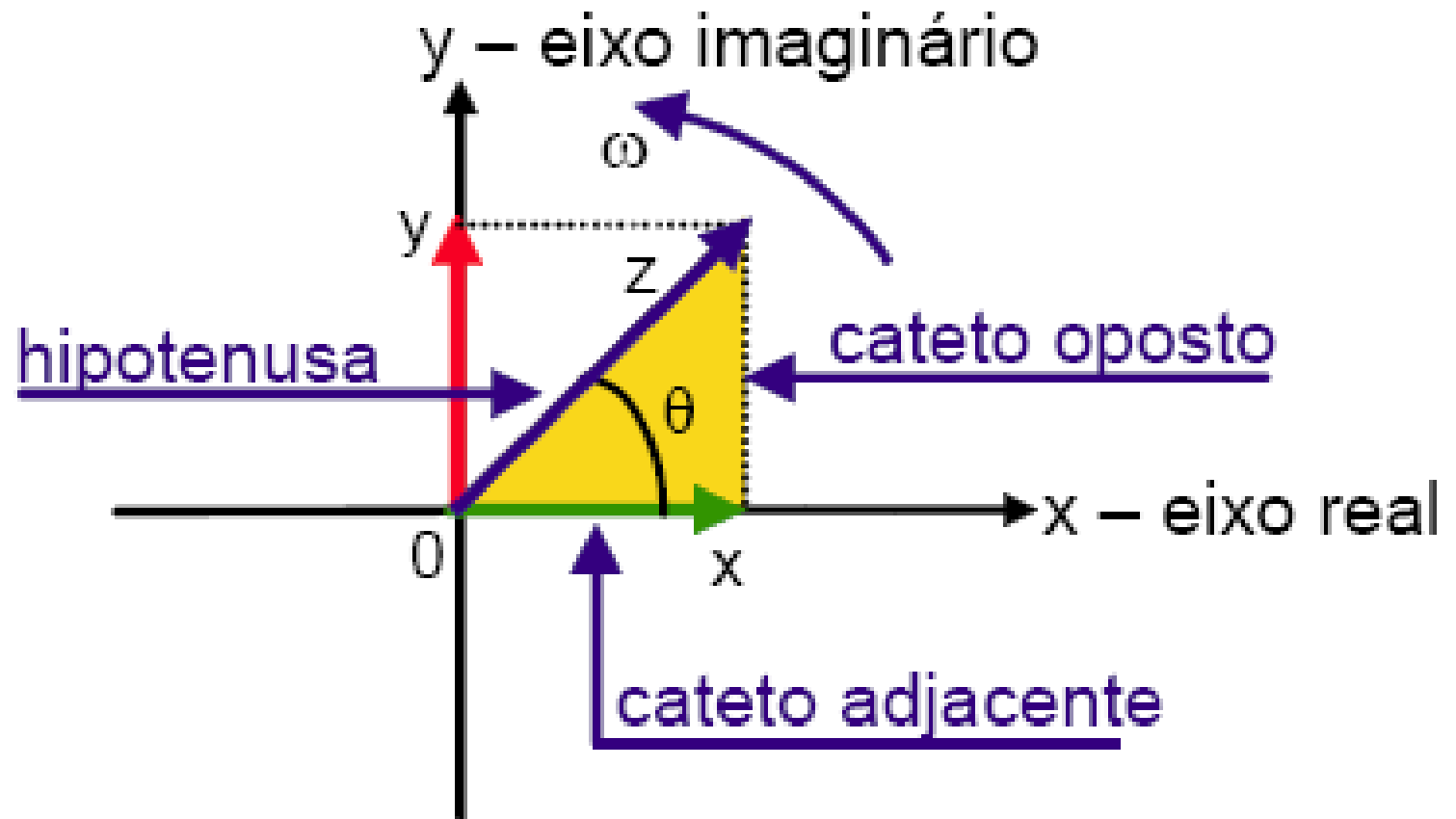
$$i(t) = 5.\text{sen}(100t + 45^\circ) \text{ A}$$



Fasores

$$C = x + jy$$

$$C = z \angle \theta$$



Fasores

Um fasor é um número complexo na forma polar.

Fasor Tensão:

$$\dot{V} = V_{ef} \angle \theta_v$$

Fasor Corrente:

$$\dot{I} = I_{ef} \angle \theta_i$$

Exemplos:

$$\text{a) } v(t) = 311 \cdot \text{sen}(377 \cdot t) \text{ V} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{b) } i(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega t + 30^\circ) \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = 10 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\text{c) } v(t) = 50 \cdot \cos(\omega t - 15^\circ) \text{ mV} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle 75^\circ \text{ mV}$$