Ferramentas para Eletrotécnica

I - Potência de Dez

1ª SÉRIE

A potência de dez é um recurso matemático utilizado para representar, de forma simplificada, quantidades muito grandes ou muito pequenas por meio da multiplicação do *algarismo significativo* pela *base dez* elevada a um *expoente* positivo ou negativo. Em eletricidade, é importante que o expoente seja um múltiplo de três.

Exemplos: 1) $2540 = 2{,}54x1000 = 2{,}54x10^3$ 2) $0{,}00834 = 8{,}34x10^{-3}$

Adição e Subtração com Potências de Dez: Ajustar as potências de dez dos operandos para um mesmo expoente e somar ou subtrair os seus algarismos significativos, conforme a operação desejada.

Exemplos: 1) $35x10^{-5} + 8{,}6x10^{-3} = 0{,}35x10^{-3} + 8{,}6x10^{-3} = (0{,}35 + 8{,}6)x10^{-3} = 8{,}95x10^{-3}$

2) $95x10^4 - 3{,}8x10^5 = 9{,}5x10^5 - 3{,}8x10^5 = (9{,}5 - 3{,}8)x10^5 = 5{,}7x10^5 = 570x10^3$

Multiplicação e Divisão com Potências de Dez: Multiplicar ou dividir os algarismos significativos dos operandos e, respectivamente, somar ou subtrair os expoentes das potências de dez, conforme a operação desejada.

Exemplos: 1) $6{,}7x10^{-3}x2x10^4 = 6{,}7x2x10^{-3+4} = 13{,}4x10^1 = 134$ 2) $\dfrac{48x10^6}{1{,}2x10^4} = \dfrac{48}{1{,}2}x10^{6-4} = 40x10^2 = 4x10^3$

Potenciação e Radiciação com Potências de Dez: Na potenciação, aplicar a potência ao algarismo significativo e multiplicar o expoente da base dez pela potência. Na radiciação, extrair a raiz do algarismo significativo e dividir o expoente da base dez pelo índice da raiz.

Exemplos: 1) $(-2x10^{-2})^3 = (-2)^3x10^{(-2)x3} = -8x10^{-6}$ 2) $\sqrt[3]{27x10^9} = 3x10^{9/3} = 3x10^3$

II - Prefixos Métricos

Os prefixos métricos são símbolos que substituem determinadas potências de dez, simplificando ainda mais a representação de quantidades muito grandes ou muito pequenas. Em eletricidade, os prefixos métricos são utilizados, particularmente, para representar potências de dez com expoentes múltiplos de três. Abaixo, segue uma tabela contendo os prefixos métricos múltiplos de três, desde -18 até $+18$.

Tabela de Prefixos Métricos					
Submúltiplos			Múltiplos		
Prefixo	Símbolo	Valor	Prefixo	Símbolo	Va
atto	a	10^{-18}	quilo	k	10^3
femto	f	10^{-15}	mega	M	10^6
pico	p	10^{-12}	giga	G	10^9
nano	n	10^{-9}	tera	T	10^{12}
micro	µ	10^{-6}	peta	P	10^{15}
mili	m	10^{-3}	exa	E	10^{18}

Exemplos: 1) $1000g = 10^3g = 1kg$ (um quilograma) 2) $0{,}005g = 5x10^{-3}g = 5mg$ (5 miligramas)

III - Teoria do Arredondamento

O arredondamento é um recurso adotado para abreviar quantidades com muitas casas decimais, desde que o erro inserido não comprometa o resultado do que está sendo avaliado.

Critério para arredondamento

determinar o número desejado de casas decimais, o *último algarismo*

a) ser *conservado* se o seguinte for inferior a *5*;

b) ser *acrescido de uma unidade* se o seguinte for superior a *5* ou igual a *5* seguido de outros al arismos;

c) ser *conservado* se ele for par e se o seguinte for igual a *5*, apenas;

d) ser *acrescido de uma unidade* se ele for ímpar e se o seguinte for igual a *5*, apenas.

NÚMEROS DECIMAIS

35,762 = 35,76
4,914 = 4,91
68,937 = 68,94
334,78539 = 334,79
83,325 = 83,32
44,445 = 44,44
2,775 = 2,78
55,555 = 55,56

Obs.: Em muitos livros, os itens c e d desses critérios de arredondamento são invertidos. O importante é adotar um critério e segui-lo sem modificá-lo.

IV - Métodos para Solução Analítica de Sistemas de Equações

Método das Substituições: Partindo de uma das equações do sistema, isola-se uma das incógnitas, substituindo-a em outras equações até que se chegue a uma equação com uma única incógnita, possibilitando a determinação dessa e das demais incógnitas.

Exemplo: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 & (I) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases}$

Da equação *I*, tem-se: $x_1 = -3 + x_2$

Substituindo x_1 na equação *II*: $2.(-3 + x_2) + 3.x_2 = 4 \Rightarrow -6 + 2.x_2 + 3.x_2 = 4 \Rightarrow 5.x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 2$

Substituindo x_2 na equação *I*: $x_1 - 2 = -3 \Rightarrow x_1 = -1$

Portanto, a solução do sistema é: $(x_1 ; x_2) = (-1 ; 2)$

Método das Adições: Multiplica-se uma ou mais equações por valores tais que a adição delas resulte em novas equações até que uma delas tenha uma única incógnita, possibilitando a determinação dessa e das demais incógnitas.

Exemplo: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 & (I) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \quad .(-2) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2.x_1 + 2.x_2 = 6 & (I) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases}$

Somando as equações *I* e *II*, tem-se: $\begin{cases} 5.x_2 = 10 & (III) \\ 2.x_1 + 3.x_2 = 4 & (II) \end{cases}$

Da equação *III*, tem-se: $5.x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 2$

Substituindo x_2 na equação *II*: $2.x_1 + (3.2) = 4 \Rightarrow 2.x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = -1$

Portanto, a solução do sistema é: $(x_1 ; x_2) = (-1 ; 2)$

Matrizes de Sistemas Lineares

Considere o seguinte sistema linear genérico:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1j}.x_j = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2j}.x_j = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}.x_1 + a_{i2}.x_2 + ... + a_{ij}.x_j = b_i \end{cases}$$

Em que:

a_{ij} = coeficiente das equações

$b_1, b_2, ..., b_i$ = termos independentes

$x_1, x_2, ..., x_j$ = incógnitas

Esse sistema de equações pode ser representado matricialmente da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} \end{matrix}}_{matriz\ I} \quad \underbrace{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_j \end{matrix}}_{matriz\ II} = \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_i \end{matrix}}_{matriz\ III}$$

Em que:

matriz I ⇒ matriz de coeficientes ou matriz incompleta

matriz II ⇒ matriz de variáveis ou matriz de incógnitas

matriz III ⇒ matriz de termos independentes

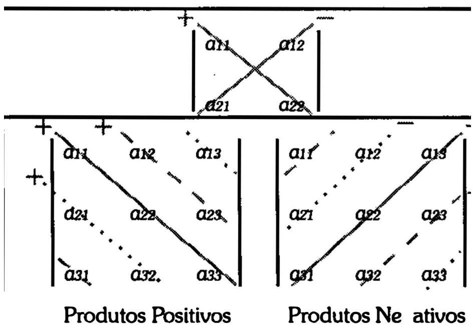
Além dessa representação, interessa-nos também a ***matriz completa*** que corresponde à matriz incompleta acrescida de uma coluna com os termos independentes, conforme mostramos ao lado:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & b_2 \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & b_i \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{matriz completa}$$

Método de Solução por Determinantes

Calcula-se o determinante D da matriz incompleta:

Matriz
2×2



⇒ $D = + a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Matriz
3×3

⇒ $D = + a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{23}.a_{32}.a_{11} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

Calculam-se os determinantes D_{xj} das matrizes incompletas, substituindo cada coluna de índice j pela matriz de termos independentes. Vejamos, como exemplo, esse procedimento para uma matriz 2×2:

Matriz
2×2

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_{x1} = + b_1.a_{22} - a_{12}.b_2$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_{x2} = + a_{11}.b_2 - b_1.a_{21}$$

Calculam-se as variáveis x_j por meio da seguinte expressão:

$$x_j = \frac{D_{xj}}{D}$$

Exemplo: Sistema de Equações Sistema matricial

$$\begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 = 0 \\ x_1 + 4.x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Determinante da matriz incompleta: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow D = (3)x(4) - (-2)x(1) = 12 + 2 \Rightarrow D = 14$

Determinante de x_1: $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow Dx_1 = (0)x(4) - (-2)x(1) = 0 + 2 \Rightarrow Dx_1 = 2$

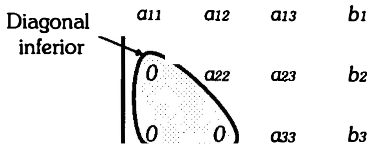
Determinante de x_2: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Dx_2 = (3)x(1) - (0)x(1) = 3 - 0 \Rightarrow Dx_2 = 3$

Cálculo de x_1 e x_2: $x_1 = \dfrac{Dx_1}{D} = \dfrac{2}{14} = 0\ 143$ e $x_2 = \dfrac{Dx_2}{D} = \dfrac{3}{14} = 0,214$

Portanto, a solução do sistema é: $(x_1 ; x_2) = (0,143 ; 0,214)$

Método de Solução por Escalonamento

Multiplica-se uma ou mais linhas da matriz completa por valores tais que a adição delas resulte em uma matriz incompleta cuja *diagonal superior* ou *inferior* tenha apenas *coeficientes nulos*, possibilitando a determinação direta das incógnitas.



Exemplo: Sistema de Equações Matriz Completa

$$\begin{cases} 3.x_1 + 3.x_2 + 6.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + 3.x_2 + 5.x_3 = -3 \\ 2.x_1 - 2.x_2 - 6.x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{cccccc} 3 & 3 & 6 & 0 & & I \\ 2 & 3 & 5 & -3 & & II \\ 2 & -2 & -6 & 0 & .(-1) & III \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 6 & 0 & I \\ 2 & 3 & 5 & -3 & II \\ -2 & 2 & 6 & 0 & III \end{array}\right. \quad \text{Somando } II \text{ com } III\text{:} \quad \begin{array}{cccccc} 3 & 3 & 6 & 0 & .(2) & I \\ 2 & 3 & 5 & -3 & .(-3) & II \\ 0 & 5 & 11 & -3 & & III \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 6 & 12 & 0 & I \\ -6 & -9 & -15 & 9 & II \\ 0 & 5 & 11 & -3 & III \end{array} \quad \text{Somando } I \text{ com } II\text{:} \quad \begin{array}{cccccc} 6 & 6 & 12 & 0 & & I \\ 0 & -3 & -3 & 9 & .(5) & II \\ 0 & 5 & 11 & -3 & .(3) & III \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 6 & 12 & 0 & I \\ 0 & -15 & -15 & 45 & II \\ 0 & 15 & 33 & -9 & III \end{array} \quad \text{Somando } II \text{ com } III\text{:} \quad \begin{array}{ccccc} 6 & 6 & 12 & 0 & I \\ 0 & -15 & -15 & 45 & II \\ 0 & 0 & 18 & 36 & III \end{array}$$

Da linha *III*, tem-se: $18.x_3 = 36 \Rightarrow x_3 = 2$

Da linha *II*, tem-se: $-15.x_2 - 15.2 = 45 \Rightarrow -15.x_2 = 75 \Rightarrow x_2 = -5$

Da linha *III*, tem-se: $6.x_1 + 6.x_2 + 12.x_3 = 0 \Rightarrow 6.x_1 + 6.(-5) + 12.2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

Portanto, a solução do sistema é: $(x_1 ; x_2 ; x_3) = (1 ; -5 ; 2)$

VI - Função Exponencial

A função exponencial é uma função não linear. O expoente da função pode ser qualquer número real. Das diversas funções exponenciais, interessa-nos, nesse momento, as seguintes:

$\boxed{y = e^{-x}}$ e $\boxed{y = 1 - e^{-x}}$

Em que: y = variável dependente de x
x = expoente
e = base neperiana

A base da função exponencial pode ser qualquer número real positivo.

Em eletricidade, no entanto, usamos principalmente o *algarismo neperiano* $e = 2{,}718281828...$, que será arredondado para duas casas decimais, isto é, $e = 2{,}72$.

Gráficos da Função Exponencial

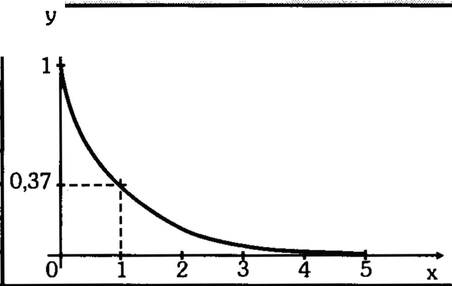
O aspecto gráfico dessas funções exponenciais está mostrado em seguida:

Fun ão Decrescente

$y = e^{-x}$

x	
0	1
1	0,37
2	0,14
3	0,05
4	0,02
5	0,01

Gráfico



Comentários

Para x variando de *zero* a *5*:

1) Se $x = 0$, y inicia em *1*.

2) Se $x = 1$, y cai *63%*, isto é, $y = 0{,}37$.

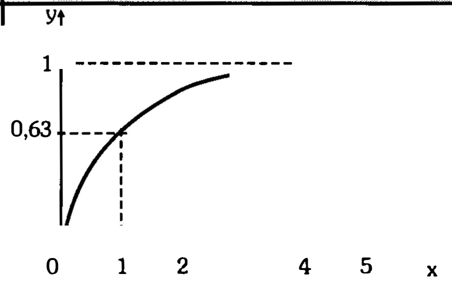
3) Se $x = 5$, y cai *99%*, isto é, $y = 0{,}01$, podendo ser considerado zero.

Função Crescente

$y = 1 - e^{-x}$

x	
0	0
1	0,63
2	0,86
3	0,95
4	0,98
5	0,99

Gráfico



Comentários

Para x variando de *zero* a *5*:

1) Se $x = 0$, y inicia em *0*.

2) Se $x = 1$, y chega a *63%* de *1*, isto é, $y = 0{,}63$.

3) Se $x = 5$, y chega a *99%* de *1*, isto é, $= 0{,}99$, odendo ser considerado *1*.

Uso da Calculadora

Nas calculadoras, as funções exponencial *genérica* e exponencial de *base neperiana* aparecem, normalmente, da seguinte forma:

FUNÇÃO

exponencial genérica.................... [x^Y].........[↑]. .... válida para qualquer base

exponencial base neperiana.......... [e^X]

VII - Função Logarítmica

A função logarítmica é uma função não linear, podendo ser representada genericamente por:

$$\boxed{log_a\ y = x}$$

Em que: x = logaritmo
y = logaritmando ($y > 0$)
a = base da função ($a > 1$)

Se a base da função logarítmica é *10*, a função é representada simplesmente por *log y*, e se a base da função logarítima é o algarismo neperiano $e = 2,72$, a função é denominada *logaritmo neperiano*, sendo representada por *ln y*.

A função logarítmica se relaciona com a função exponencial da seguinte forma: $log_a\ y = x \iff a^x = y$

Essa relação é importante quando desejamos calcular o expoente x da função exponencial para um valor de y conhecido. Nesse caso, determina-se x por meio do logaritmo de y.

Propriedades Básicas dos Logaritmos

Produto	Matematicamente
O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores desse produto.	$log_a(A.B) = log_a A + log_a B$
Divisão	**Matematicamente**
O logaritmo de uma divisão é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.	$log_a\left(\frac{A}{B}\right) = log_a A - log_a B$
Potência no Logaritmando	**Matematicamente**
O logaritmo de um valor elevado a um expoente é igual ao produto do ex oente elo lo aritmo desse valor.	$log_a A^B = B.log_a A$

Uso da Calculadora

Nas calculadoras, as funções logaritmo *base 10* e o logaritmo *neperiano* aparecem, normalmente, da seguinte forma:

	Teclas Alternativas		Campo
logaritmo base 10........................	[LOG]	.... [LOG X].	.... logaritmando > 0
logaritmo neperiano......................	[LN]	.... [LN X].	.... logaritmando > 0

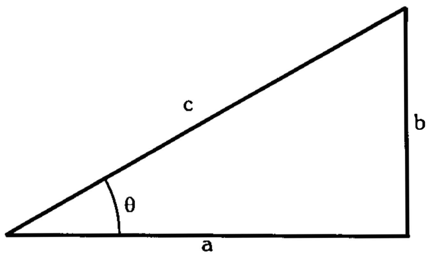
VIII - Identidades Trigonométricas

2ª SÉRIE

Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

No triângulo retângulo, o ângulo θ relaciona-se trigonometricamente com os catetos a e b e com a hipotenusa c por:

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{b}{c} \qquad tg\,\theta = \frac{b}{a}$$



Dessas relações, deduzimos que: $tg\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ e $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

As funções trigonométricas inversas *arco cosseno*, *arco seno* e *arco tangente* são muito utilizadas em eletricidade, e servem para determinar o ângulo θ a partir, respectivamente, do seu *cosseno*, *seno* ou *tangente*. As fórmulas são:

$$\theta = \arccos\frac{a}{c} \qquad \theta = \text{arcsen}\frac{b}{c} \qquad \theta = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$$

A tabela seguinte apresenta as identidades trigonométricas mais usadas em eletricidade:

Principais Identidades Trigonométricas

Conjugado do Ângulo:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$$
$$tg(-\theta) = -tg\,\theta$$

Complemento e Suplemento do Ângulo:

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \text{sen}\,\theta$$
$$\text{sen}(180^\circ - \theta) = \text{sen}\,\theta$$
$$\text{sen}(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

Dobro e Metade do Ângulo:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$$
$$\text{sen}\,2\theta = 2.\text{sen}\,\theta.\cos\theta$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \quad (*)$$
$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad (*)$$

(*) O sinal é + ou – em função do quadrante do ângulo.

Adição e Subtração de Ângulos:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta$$
$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha.\cos\beta \pm \text{sen}\,\beta.\cos\alpha$$

Conversão para Produto:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2.\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\text{sen}\,\alpha \pm \cos\beta = 2.\text{sen}\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

Conversão para Adição:

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}.[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}.[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\text{sen}\,\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}.[\text{sen}(\alpha-\beta) + \text{sen}(\alpha+\beta)]$$

Uso da Calculadora

Nas calculadoras eletrônicas, antes de executarmos uma operação trigonométrica, é necessário escolhermos em que unidade de medida desejamos trabalhar, isto é, em grau ou radiano.

Muitas calculadoras apresentam as funções em inglês. Neste caso, você encontrará, por exemplo, SIN (*sinus*) para seno e DEG (*degree*) para grau.

ATENÇÃO!

Cuidado para não confundir DEG (*degree*) ≡ grau com GRAD (*grad*) ≡ grado. O grado é uma unidade de ângulo pouco utilizada em eletricidade e equivale a *1 / 400* da circunferência, enquanto o grau equivale a *1 / 360.*

A tabela seguinte apresenta as teclas referentes às principais funções trigonométricas:

Função	Teclas Alternativas			po
cosseno	[COS]			
arco cosseno	[ACOS]	[ACS]	[COS^{-1}]	$0° \le \theta \le 180°$
seno	[SIN]			
arco seno	[ASIN]	[ASN]	[SIN^{-1}]	$-90° \le \theta \le 90°$
tangente	[TG]	[TAN]		$\theta = n.90° \rightarrow$ erro
arco tangente	[ATG]	[ATAN]	[TG^{-1}]	$-90° \le \theta \le 90°$
grau	[DEG]			
radiano	[RAD]			

Ao executar as operações inversas *arco cosseno*, *arco seno* e *arco tangente*, a calculadora fornecerá resultados limitados aos campos descritos na tabela acima. Isso acontece porque sempre há dois ângulos cujo cosseno, seno e tangente resultam em um mesmo valor.

Assim, caso o ângulo desejado nessas operações esteja fora desses campos, é necessário fazer a correção baseada nas identidades seguintes:

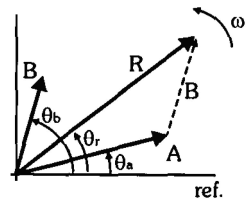
- $cos\ \theta = cos\ (-\theta)$
- $sen\ \theta = sen\ (180° - \theta)$
- $tg\ \theta = tg\ (180° + \theta)$

IX - Operações Fasoriais

Adição de Fasores

A adição gráfica de dois fasores é feita por meio da regra do paralelogramo.

Exemplo: $R(\theta_r) = A(\theta_a) + B(\theta_b)$



1) Desloca-se paralelamente o fasor B até a ponta do fasor A;

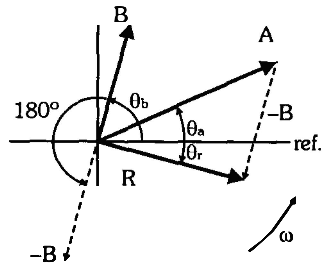
2) O módulo do fasor resultante R é igual ao tamanho da seta que liga o início da fasor A à ponta do fasor B;

3) O ângulo do fasor resultante é θ_r.

Subtração de Fasores

A subtração gráfica de dois fasores é feita também pela adição por meio da regra do paralelogramo, só que o fasor subtraendo deve ser defasado em *180º*.

Exemplo: $R(\theta_r) = A(\theta_a) - B(\theta_b)$



1) Defasa-se o fasor B em *180º*, obtendo o fasor $-B$;

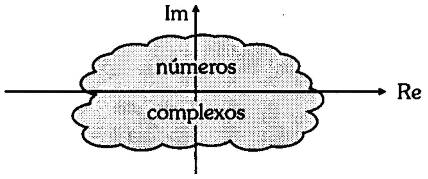
2) Desloca-se paralelamente o fasor $-B$ até a ponta do fasor A;

3) O módulo do fasor resultante R é igual ao tamanho da seta que liga o início da fasor A à ponta do fasor $-B$;

4) O ângulo do fasor resultante é θ_r.

X - Números Complexos

Definição de Número Complexo



Um número complexo tem duas dimensões, sendo uma *real* e outra *imaginária*.

Por isso, eles devem ser representados num plano cartesiano formado por um eixo horizontal real *Re* e por um eixo vertical imaginário *Im*.

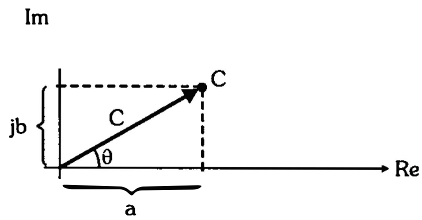
Define-se unidade imaginária o número j, tal que: $\boxed{j=\sqrt{-1}}$ ou $\boxed{j^2=-1}$

Assim, pode-se obter resultados positivos e negativos (*Re* ou *Im*) a partir de um número imaginário elevado a uma potência, como também pode-se extrair a raiz de números negativos (*Re*).

Exemplos:

- $j^3 = j^2.j = (-1).j = -j$
- $j^4 = j^2.j^2 = (-1).(-1) = 1$
- $j^5 = j^4.j = 1.j = j$
- $1/j = j^{-1} = -j$
- $1/-j = -(j^{-1}) = j$
- $1/j^2 = 1/-1 = -1$
- $\sqrt{-4} = \sqrt{j^2.4} = j\sqrt{4} = j2$
- $\sqrt{-9} = \sqrt{j^2.9} = j\sqrt{9} = j3$
- $\sqrt{-30} = \sqrt{j^2.30} = j\sqrt{30} = j5,48$

Considere um número complexo C locado num ponto qualquer do plano cartesiano.



Há duas formas de representar analiticamente esse mesmo número complexo:

$$\begin{cases} \dot{C} = a + jb & \textit{(forma retangular)} \\ \dot{C} = C\angle\theta & \textit{(forma polar)} \end{cases}$$

em que:
- C ⇒ número complexo (o ponto **.** caracteriza-o como número complexo)
- a ⇒ componente real (positiva ou negativa)
- ⇒ componente imaginária (positiva ou negativa)
- C ⇒ (ou $|C|$) módulo do número complexo (sempre positivo)
- ⇒ fase do número complexo (positiva ou negativa, a partir da referência Re^+)

Conversão entre as Formas Retangular e Polar

Várias expressões entre os elementos que compõem um número complexo podem ser obtidas por meio do Teorema de Pitágoras e das relações trigonométricas aplicadas ao triângulo retângulo formado no plano cartesiano:

Elementos da Forma Retangular:

Componente real $\Rightarrow$ $\boxed{a = C.\cos\ \theta}$

Componente imaginária $\Rightarrow$ $b = C.\text{sen}\ \theta$

Elementos da Forma Polar:

Módulo de $\dot{C}$ $\Rightarrow$ $\boxed{C = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Fase de C $\Rightarrow$ $\theta = arctg\,\frac{b}{a}$

Por meio destas expressões, é possível converter um número complexo da forma retangular na polar e vice-versa.

CUIDADO!

Nas calculadoras, as funções *arco cosseno*, *arco seno* e *arco tangente* operam, cada uma, apenas em dois quadrantes específicos. Para mais informações, consulte o tópico VIII deste apêndice.

Operações com Números Complexos

Considere os números complexos seguintes: $\dot{C}_1 = a_1 + jb_1$ $\quad C_1 = C_1\angle\theta_1$

e

$C_2 = a_2 + jb_2$ $\quad \dot{C}_2 = C_2\angle\theta_2$

Adição e Subtração com Números Complexos

Para realizar as operações adição e subtração com números complexos, a melhor opção é convertê-los primeiramente na *forma retangular*. Assim, tais operações tornam-se bastante simples, conforme mostramos em seguida.

Na *adição*, determina-se a soma algébrica das componentes reais e das imaginárias, obtendo o número complexo resultante.

$$+\dot{C}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Na *subtração*, determina-se a subtração algébrica das componentes reais e das imaginárias, obtendo o número complexo resultante.

$$\boxed{\dot{C}_1 - \dot{C}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)}$$

Multiplicação e Divisão com Números Complexos

Para realizar as operações multiplicação e divisão com números complexos, a melhor opção é convertê-los primeiramente na *forma polar*. Assim, tais operações tornam-se bastante simples, conforme mostramos em seguida.

Na *multiplicação*, determinam-se o produto dos módulos e a soma algébrica das fases, obtendo o número complexo resultante.

$$\boxed{\dot{C}_1.\dot{C}_2 = (C_1.C_2)\angle(\theta_1 + \theta_2)}$$

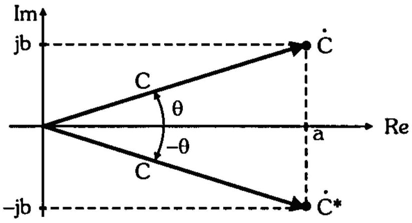
Na *divisão*, determinam-se o quociente entre os módulos e a subtração algébrica das fases, obtendo o número complexo resultante.

$$\frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{C_1}{C_2}\angle(\theta_1$$

Conjugado de um Número Complexo

Considere o número complexo $\dot{C} = a + jb \equiv \dot{C} = C\angle\theta$.

Por definição, o seu conjugado é:



$$\boxed{\dot{C}^* = a - jb} \qquad \boxed{\dot{C}^* = C\angle-\theta}$$

Assim, no conjugado do número complexo, a componente imaginária da forma retangular e a fase da forma polar têm os seus sinais trocados, mas a componente real e o módulo permanecem inalterados.

As principais propriedades do conjugado são:

1) Os módulos de $\dot{C}$ e de $\dot{C}^*$ são iguais, pois: $C = C^* = \sqrt{a^2 + b^2}$

2) O produto $\dot{C}.\dot{C}^*$ resulta sempre em um *número real* igual ao quadrado do módulo, pois:

$$\dot{C}.\dot{C}^* = (a + jb).(a - jb) = a^2 - jab + jab - j^2b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \dot{C}.\dot{C}^* = C^2$$ ou

$$\dot{C}.\dot{C}^* = (C\angle\theta).(C\angle-\theta) = C^2\angle 0^o \Rightarrow \qquad \dot{C}.\dot{C}^* = C^2$$

ATENÇÃO!

1) Cuidado para não confundir $\dot{C}$ (número complexo) com C (módulo do número complexo).

2) Ao realizar análises com números complexos, deve-se adotar um número de casas decimais para as componentes real e imaginária e para módulo e fase de acordo com a precisão desejada, usando as regras de arredondamento (veja tópico III deste apêndice). Levando em consideração que a análise teórica de um circuito é feita geralmente a partir de valores nominais, enquanto a análise experimental do mesmo circuito trabalha com valores reais, a utilização de duas casas decimais em cálculos é mais do que suficiente e, na maioria dos casos, desnecessária.

XI - Regras de Derivação e Derivadas Elementares 3ª SÉRIE

Regras Elementares de Derivação:

Considere as funções genéricas: $y(x)$, $u(x)$, $v(x)$ e a constante k.

As principais regras de derivação são as seguintes:

1) $y(x) = k.u(x)$ $\Rightarrow$ $$\frac{dy(x)}{dx} = k.\frac{du(x)}{dx}$$

2) $y(x) = u(x) + v(x)$ $\Rightarrow$ $$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx} + \frac{dv(x)}{dx}$$

3) $y(x) = u(x) \,.\, v(x)$ $\Rightarrow$ $$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx}.v(x) + u(x).\frac{dv(x)}{dx}$$

4) $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow$ $$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{du(x)}{dx}.v(x) - u(x).\frac{dv(x)}{dx}}{[v(x)]^2}$$

5) $y = f[u(x)]$ $$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy[u(x)]}{d[u(x)]} \; \frac{d[u(x)]}{dx}$$

A tabela seguinte apresenta as derivadas elementares que atendem às necessidades deste livro:

DERIVADAS

1) $y(x) = k$ $\Rightarrow$ $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2) $y(x) = k.x$ $\Rightarrow$ $\frac{dy(x)}{dx} = k$

3) $y(x) = x^k$ $\Rightarrow$ $\frac{dy(x)}{dx} = k.x^{(k-1)}$

4) $y(x) = k^x$ $\frac{dy(x)}{dx} = k^x.\ln k$ para $(k > 0)$

5) $y(x) = e^x$ $\Rightarrow$ $\frac{dy(x)}{dx} = e^x$

6) $y(x) = \ln x$ $\Rightarrow$ $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{x}$

7) $y(x) = \log_k x$ $\Rightarrow$ $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{x.\ln k}$ para $(k > 0)$

8) $y(x) = sen\, x$ $\Rightarrow$ $\frac{dy(x)}{dx} = \cos x$

9) $y(x) = \cos x$ $\frac{dy(x)}{dx} = -sen\, x$

10) $y(x) = tg\, x$ $\frac{dy(x)}{dx} = \sec^2 x$

XII - Regras de Integração e Integrais Elementares

Regras Elementares de Integração:

Considere as funções genéricas: *y(x)*, *u(x)*, *v(x)* e a constante *k*.

As principais regras de integração são as seguintes:

1) $\int \frac{dy(x)}{dx}.dx = y(x)$

2) $\int k.y(x)dx = k.\int y(x)dx$

3) $\int [u(x)+v(x)]dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$

4) $\int u(x)d[v(x)] = u(x).v(x) - \int v(x)d[u(x)]$

5) $\int y(kx)dx = \frac{1}{k}.\int y(kx)d(kx)$

A tabela seguinte apresenta as integrais elementares que atendem às necessidades deste livro:

INTEGRAIS ELEMENTARES

1) $\int kdx = kx$

2) $\int x^k dx = \frac{x^{(k+1)}}{k+1}$

3) $\int \frac{1}{x}dx = |ln\, x|$

4) $\int e^x dx = e^x$

5) $\int k^x dx = \frac{k^x}{ln\, k}$ para $(k > 0)$

6) $\int sen\, xdx = -cos\, x$

7) $\int cos\, xdx = sen\, x$

8) $\int tgxdx = -ln(cos\, x)$

9) $\int sen^2\, x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\, 2x}{4}$

10) $\int cos^2\, x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 2x}{4}$