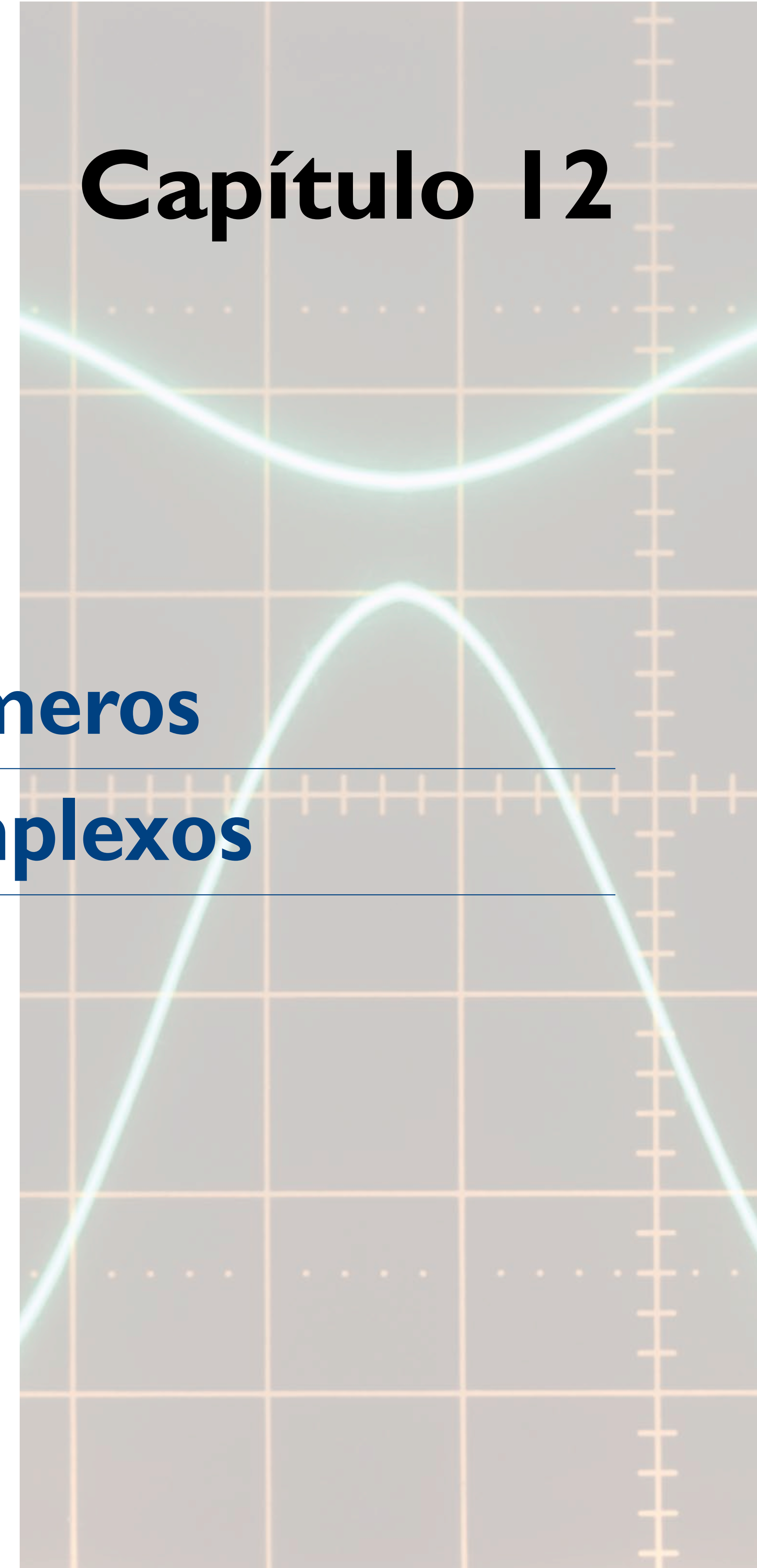
Capítulo 12



Números complexos

O conjunto dos números complexos compreende todos os reais e os chamados números imaginários, representados por pares ordenados, nos quais a abscissa é um número real e a ordenada, um múltiplo real da raiz quadrada de –1. Em matemática, a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$) é indicada por i, e, em eletricidade, para não confundirmos com a corrente elétrica, por j:

$$j = \sqrt{-1}$$

Para representar outros números imaginários, como $\sqrt{-4}$, é preciso lembrar que :

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = j2$$

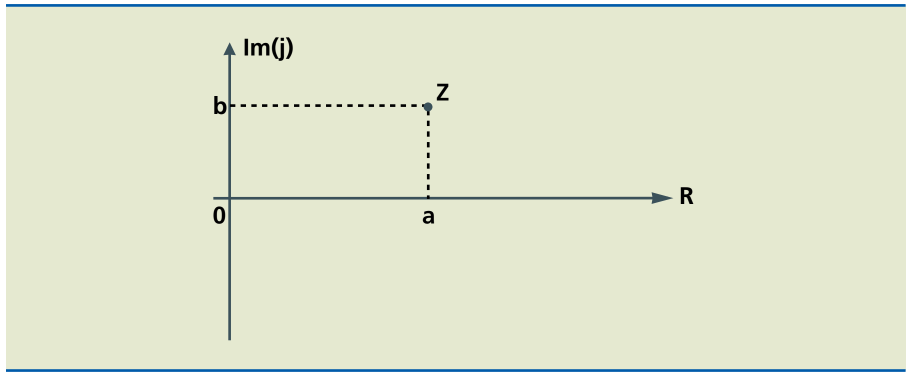
12.1 Formas de representação

Os números complexos podem ser representados de duas formas: cartesiana ou retangular; polar ou trigonométrica.

12.1.1 Forma cartesiana ou retangular

Seja z um número complexo qualquer (figura 12.1).

Figura 12.1
Representação cartesiana de um número complexo z.



Pode-se representá-lo por:

$$z = a + jb \quad (12.1)$$

em que a e b são números reais.

12.1.2 Forma polar ou trigonométrica

No gráfico da figura 12.2, o ponto que representa o número complexo z encontra-se a determinada distância da origem (0;0), definida como o módulo do número complexo z: $|z|$.

Essa distância pode ser obtida aplicando o teorema de Pitágoras a qualquer dos triângulos da figura.

Assim:

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

ou

$$Z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (12.2)$$

O fato de conhecer essa distância, ou seja, o módulo, não nos permite determinar exatamente um número complexo, uma vez que qualquer ponto em uma circunferência de raio $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ com centro em (0;0) poderia ser a solução. Para encontrar esse número, utiliza-se a forma chamada polar, que associa ao número o ângulo φ, formado pela direção do módulo de z e pelo eixo horizontal. Esse ângulo é considerado positivo no sentido anti-horário e negativo no horário.

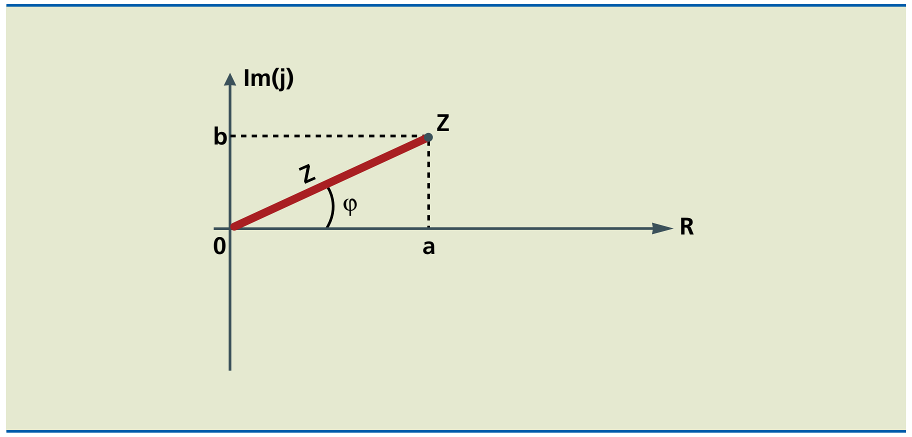


Figura 12.2
Representação de um número complexo.

Assim, o número complexo z pode ser escrito na forma polar como:

$$z = |z|\cos\varphi + |z|j\operatorname{sen}\varphi \quad (12.3)$$

As equações 12.1 e 12.3 são idênticas, pois definem o mesmo número. Então, é possível estabelecer a seguinte relação entre a forma polar e a cartesiana:

$$a = |z|\cos\varphi \quad (12.4)$$

$$b = |z|\operatorname{sen}\varphi \quad (12.5)$$

A letra maiúscula (Z) se refere ao módulo do número complexo e a minúscula (z), ao número complexo propriamente dito. O ângulo φ é chamado argumento do número complexo.

Para simplificar as operações e a escrita, vamos recorrer à seguinte notação para indicar o número complexo z na forma polar:

$$z = Z\underline{|\varphi} \quad (12.6)$$

em que o símbolo $\underline{|\varphi}$ indica $\cos\varphi + j\text{sen}\varphi$ e é lido como "cis fi".

12.2 Conjugado de um número complexo

Na forma cartesiana, denomina-se conjugado de um número complexo $z = a + bj$ o número:

$$\bar{z} = a - bj \quad (12.7)$$

Na forma polar, esse número é representado por:

$$z = Z\,\underline{|-\varphi} \quad (12.8)$$

A relação entre um número complexo e seu conjugado é dada por:

$$z \cdot \bar{z} = |z| \quad (12.9)$$

12.3 Operações com números complexos

É possível efetuar as principais operações com números complexos (soma, subtração, multiplicação e divisão). Em algumas delas, é mais conveniente o emprego da forma cartesiana; em outras, a forma polar.

12.3.1 Soma e subtração

Nesses casos, trabalha-se com os números complexos na forma cartesiana ou retangular.

Sejam os números complexos:

$$z_1 = a_1 + b_1 j$$

e

$$z_2 = a_2 + b_2 j$$

O resultado da soma entre eles será:

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2) \quad (12.10)$$

e da subtração:

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + j(b_1 - b_2) \quad (12.11)$$

12.3.2 Multiplicação

Nesse caso, trabalha-se com os números complexos na forma polar.

Sejam os números complexos:

$$z_1 = Z_1\underline{|\varphi_1} \quad \text{e} \quad z_2 = Z_2\underline{|\varphi_2}.$$

A multiplicação entre eles terá como resultado:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (Z_1 \cdot Z_2)\underline{|\varphi_1 + \varphi_2} \quad (12.12)$$

Portanto, o módulo resultante corresponde ao produto dos módulos, e o argumento resultante, à soma dos argumentos dos números complexos.

12.3.3 Divisão

A operação de divisão não está definida. Em vez disso, realiza-se a multiplicação entre o primeiro número e o complexo conjugado do segundo.

Pode-se escrever $\dfrac{z_1}{z_2}$ como:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(Z_1\underline{|\varphi_1}) \cdot (Z_2\underline{|-\varphi_2})}{(Z_2\underline{|\varphi_2}) \cdot (Z_2\underline{|-\varphi_2})} = \frac{Z_1 \cdot \cancel{Z_2}\,\underline{|\varphi_1 - \varphi_2}}{Z_2^{\cancel{2}}} \Rightarrow \quad (12.13)$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)\underline{|\varphi_1 - \varphi_2}$$

Portanto, o módulo resultante corresponde ao quociente dos módulos, e o argumento resultante, à diferença dos argumentos dos números complexos.

12.4 Representação da corrente alternada com números complexos

Dada a equação de uma tensão alternada:

$$V(t) = V_{máx} \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi) \quad (12.14)$$

Pode-se representá-la na forma polar:

$$V = V_{máx}\underline{|\varphi} \quad (12.15)$$