APÊNDICE 12

# DEDUÇÕES MATEMÁTICAS

Os estudantes com maior base matemática encontrarão a seguir informações complementares sobre alguns dos assuntos estudados nos capítulos indicados.

### Valor médio de uma C.A. senoidal

Aprendemos no Capítulo XIII que o valor instantâneo de uma C.A. senoidal é dado pela expressão:

$i = I_{max} \text{ sen } \omega$

Representemos ωt por θ:

$i = I_{max} \text{ sen } \theta$

Sabemos que uma alternação é completada quando θ varia de 0º a 180º, isto é, de 0 a π radiano: trabalhamos com meio ciclo porque o valor médio de um ciclo completo (duas alternações iguais e de sinais opostos) é zero.

Assim, o valor médio (Im) da corrente é

$$I_m \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_{max} \text{sen}\,\theta . d\theta =$$

$$= \frac{-I_{max}}{\pi}\left[\cos 0\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2I_{max}}{\pi} =$$

$$= 0,636\ I_{max}$$

Como a tensão entre os extremos de um resistor é diretamente proporcional à corrente, a expressão achada para o valor médio da corrente também se aplica ao valor médio da tensão senoidal:

$$E_m = 0,636\ E_{max}$$

### Valor eficaz de uma função periódica

(Ver Cap. XIII)

Podemos definir o valor eficaz de uma corrente periódica comparando-a com uma corrente contínua. Admitamos que a corrente periódica i foi estabelecida em um corpo de resistência R. Em um período T, a energia $W_1$ consumida em R é (Lei de Joule):

$$W_1 = \int_{t_1}^{t_2} i^2 R\, dt \quad t_2 - t_1 = T$$

Suponhamos agora que resistência idêntica R esteja sendo percorrida por uma corrente contínua I de tal intensidade que, no mesmo tempo T, a energia elétrica consumida em R também seja $W_1$. Assim,

$$W_1 = \int_{t_1}^{t_2} I^2 R\, dt$$

Igualando as duas expressões:

$$\int_{t_1}^{t_2} I^2\, dt = \int_{t_1}^{t_2} i^2\, dt$$

Integrando e resolvendo para I,

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} i^2\, dt}$$

A corrente I é o valor eficaz ($I_{ef}$) e corresponde à raiz quadrada da média dos quadrados dos valores instantâneos.

Sabemos que para uma corrente senoidal

$$i = I_{max} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

Podemos igualar a energia dissipada na resistência R (durante um período da onda) com a energia dissipada no mesmo tempo por uma corrente I uma resistência R igual,

$$\int_0^T \left(I_{max} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}\right)^2 R\, dt = \int_0^T I^2 R\, dt$$

Agora, dividindo por R e visando a identidade

$$\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi t}{T} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{4\pi t}{T}\right)$$

Para integrar o membro esquerdo da equação, temos

$$I_{max}^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{T}{4\pi} \operatorname{sen} \frac{4\pi t}{T}\right]_0^T = I^2 t\Big]_0^T$$

Resolvendo para I,

$$I_{ef}^2 = \frac{I_{max}^2}{2}$$

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{ef} = 0,707 I_{max}$$

## Crescimento da carga de um capacitor

(Ver Cap. XXI)

Consideremos uma capacitância C (em farads) em série com uma resistência R (em ohms). Se uma tensão E for aplicada ao conjunto, no instante t = 0 a diferença de potencial entre as placas do capacitor será zero e a corrente instantânea no circuito será $i = \frac{E}{R}$.

À medida que a carga do capacitor for crescendo, a diferença de potencial entre suas placas atuará como uma força contra-eletromotriz e a corrente de carga será reduzida para

$$i = \frac{(E - e_c)}{R}$$ $e_c$ = Tensão instantânea no capacitor

ou

$$iR = E - e_c$$

Podemos, escrever que

$$e_c = \frac{q}{C} \qquad \text{e} \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

Então,

$$R \cdot \frac{dq}{dt} = E - \frac{q}{C} = \frac{CE - q}{C}$$

$$CR \cdot \frac{dq}{dt} = -(q - CE)$$

$$\frac{dq}{q - CE} = \frac{-dt}{CR}$$

Integrando,

$$\log(q - CE) = -t/CR + R$$

$$q - CE = K.e^{-\frac{t}{CR}}$$

Substituindo,

q = 0 quando t = 0.

$$0 - CE = k \cdot e^0$$
$$-CE = k$$
$$q = CE - CE.e^{\frac{t}{CR}}$$
$$q = CE(I - e^{\frac{t}{CR}})$$

## Crescimento da corrente em um circuito R-L

(Ver Cap. XXI)

Se uma fonte de E volts for aplicada no instante t = 0 a um circuito contendo resistência R (em ohms) e indutância L (em henrys), a corrente instantânea de i ampères, após um tempo de t segundos, proporcionará uma queda de tensão iR na resistência e uma força contra-eletromotriz L. di/dt na indutância:

$$E = L\frac{di}{dt} + iR$$

$$E - iR = L.\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{E - iR} = \frac{dt}{L}$$

Integrando,

$$-\frac{I}{R}.\log(E - iR) = \frac{t}{L} + k$$

$$E - iR = k.e^{\frac{Rt}{I}}$$

Substituindo i = 0 quando t = 0

$$E - 0 = k \cdot e^0$$
$$E = k$$
$$E - iR = E \cdot e^{\frac{Rt}{I}}$$
$$iR = E - E \cdot e^{\frac{Rt}{I}} = E(I - e^{\frac{Rt}{I}})$$
$$i = \frac{E}{R}(I - e^{\frac{Rt}{I}})$$