

INTRODUÇÃO A PESQUISA OPERACIONAL

1) Conceito

Pesquisa Operacional é um método científico de tomada de decisões. Em linhas gerais, consiste na descrição de um modelo que através de experimentação leva à descoberta da melhor maneira de operar um sistema.

2) Fases de um estudo de P.O.

Um estudo de Pesquisa Operacional costuma envolver cinco fases:

- Definição do problema;
- Construção do modelo do sistema;
- Cálculo da solução através do modelo;
- Validação modelo;
- Implementação do modelo.

Apesar da seqüência acima não ser rígida, ela indica as principais etapas a serem vencidas.

A seguir é apresentado um resumo de cada uma das fases:

Definição do problema

A definição do problema baseia-se em três aspectos fundamentais:

Descrição exata dos objetivos do estudo

Identificação das alternativas de decisão existentes

Reconhecimento das limitações, restrições e exigências do sistema.

A descrição dos objetivos é uma das tarefas mais importantes em todo o processo do estudo, pois é a partir dela que o modelo é concebido. Da mesma forma é essencial que as alternativas de decisão e as limitações existentes sejam todas explicitadas, para que as soluções obtidas ao final do processo sejam válidas e aceitáveis.

Construção do modelo

A escolha apropriada do sistema é fundamental para a qualidade da solução fornecida. Se o modelo elaborado tem a forma de um modelo conhecido, a solução pode ser obtida através de métodos matemáticos convencionais. Por outro lado, se as relações matemáticas são muito complexas, talvez se faça necessário combinações de metodologias.

Solução do modelo

O objetivo desta fase é encontrar solução para o modelo proposto. Ao contrário das outras fases, que não possuem regras fixas, a solução do modelo é baseada geralmente em técnicas matemáticas existentes.

No caso de um modelo matemático, a solução é obtida, pelo algoritmo mais adequado, em termos de rapidez de processamento e precisão da resposta. Isto exige um conhecimento profundo das técnicas existentes. A solução obtida, neste caso, é dita "ótima".

Validação do modelo

Nessa altura do processo de solução do problema, é necessário verificar a validade do modelo. Um modelo é válido se, levando-se em conta sua inexatidão em representar o sistema, ele for capaz de fornecer uma previsão aceitável do comportamento do sistema. Um método comum para testar a validade do sistema é analisar seu desempenho com dados passados do sistema e verificar se ele consegue reproduzir o comportamento que o sistema apresentou.

É importante observar que este processo de validação não se aplica a processos inexistentes, ou seja, um projeto. Nesse caso, a validade é feita pela verificação da correspondência entre os resultados obtidos e algum comportamento esperado do novo sistema.

Implementação da solução

Avaliadas as vantagens e a validação da solução obtida, esta deve ser convertida em regras operacionais. A implementação, por ser uma atividade que altera uma situação existente, é uma das etapas críticas do estudo. É conveniente que seja controlada pela equipe responsável, pois, eventualmente, os valores da nova solução, quando levados à prática, podem demonstrar a necessidade de correções nas relações funcionais do modelo conjuntos dos possíveis cursos de ação, exigindo a reformulação do modelo em algumas de suas partes.

O PROCESSO DE MODELAGEM

Quando os executivos se vêem diante de uma situação na qual uma decisão de ser tomada entre uma série de alternativas conflitantes e concorrentes, duas opções básicas se apresentam:

- 1) usar a sua intuição gerencial e,
- 2) realizar um processo de modelagem da situação e realizar exaustivamente simulações dos mais diversos cenários de maneira a estudar mais profundamente o problema.

Até recentemente, a primeira opção se constituía na única alternativa viável, visto que não existiam nem dados e/ou informações sobre os problemas, ou mesmo poder computacional para resolvê-los. Com o advento dos microcomputadores e com o aprimoramento da tecnologia de bancos de dados, esta deixou de ser a única opção para os tomadores de decisão. Um número cada vez maior de empresas e tomadores de decisão começou a optar pela segunda forma de tomada de decisão, isto é, através da elaboração de modelos para auxiliar este processo.

Na realidade, nos dias de hoje está ocorrendo o inverso de 20 anos atrás. Possivelmente, a grande maioria dos tomadores de decisão está adotando a segunda opção de agir. Devemos ressaltar dois fatos relevantes:

a) A quantidade de informações cresceu exponencialmente nos últimos anos com o advento da internet, o que nos levou ao problema inverso de 20 anos atrás; a quantidade de dados é tão grande que se torna impossível montar modelos com todas estas informações. Devemos, portanto, separar as informações relevantes das irrelevantes, de maneira a modelar a situação para que possamos analisá-la.

b) Muitos gerentes deixaram de utilizar sua intuição completamente o que é bastante prejudicial ao processo de tomada de decisão, pois uma base de conhecimento pode estar sendo desperdiçada.

Portanto, as duas opções devem ser utilizadas conjuntamente, para melhorar ainda mais o processo de tomada de decisão; a intuição do tomador de decisão deve ajudá-lo na seleção das informações relevantes, nos possíveis cenários a serem estudados, na validação do modelo e na análise dos seus resultados dos mesmos.

A TOMADA DE DECISÃO

Podemos entender a tomada de decisão como o processo de identificar os problemas ou uma oportunidade e selecionar uma linha e ação para resolvê-lo. Um problema ocorre quando o estado atual de uma situação é diferente do estado desejado. Uma oportunidade ocorre quando as circunstâncias oferecem a chance do indivíduo/organização ultrapassar seus objetivos e/ou metas.

Vários fatores afetam a tomada de decisão e entre eles podemos destacar:

- Tempo disponível para a tomada de decisão
 - A importância da decisão
 - O ambiente
 - Certeza / incerteza e risco
 - Agentes decisores
 - Conflito de interesses.

Diversas vantagens podem ser citadas quando o decisor utiliza um processo de modelagem

para a tomada de decisão:

- Os modelos forçam os decisores a tornarem explícitos seus objetivos
- Os modelos forçam a identificação e o armazenamento das diferentes decisões que influenciam os objetivos.
- Os modelos forçam a identificação das variáveis a serem incluídas e em que termos elas serão quantificáveis.
- Os modelos forçam o reconhecimento de limitações.
- Os modelos permitem a comunicação de suas idéias e seu entendimento para facilitar trabalho de grupo.

Dadas estas características, os modelos podem ser utilizados como ferramentas consistentes para a avaliação e divulgação de diferentes políticas empresariais.

PROGRAMAÇÃO LINEAR

O problema geral da programação linear é utilizado para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada de função objetivo, sujeita a uma série de equações ou inequações lineares, chamadas restrições. A formulação do problema a ser resolvido em programação linear, segue alguns passos básicos:

Deve ser definido o objetivo básico do problema, ou seja, a otimização a ser alcançada. Por exemplo, maximização de lucro ou desempenhos, ou de bem-estar social; minimização de custos, de perdas, de tempo. Tal objetivo será representado por uma função objetivo a ser maximizada ou minimizada.

Para que esta função matemática seja devidamente especificada, devem ser definidas as variáveis de decisão envolvidas. Por exemplo: número de máquinas, a área a ser explorada, a classe de investimento à disposição, etc. Normalmente assume-se que estas variáveis possam assumir valores positivos.

Estas variáveis normalmente estão sujeitas a uma série de restrições, normalmente representadas por inequações. Por exemplo, quantidade de equipamentos disponível, tamanho da área a ser explorada, capacidade de um reservatório, exigências nutricionais para determinada dieta, etc.

Todas essas expressões, entretanto, devem estar de acordo com a hipótese principal da programação linear, ou seja, todas as relações entre as variáveis devem ser lineares. Isto implica proporcionalidade das quantidades envolvidas. Esta característica de linearidade pode ser interessante no tocante à simplificação da estrutura matemática envolvida. A PL é uma técnica de planejamento que se originou no final da década de quarenta e, com o surgimento do computador na década de cinquenta, encontrou o seu aliado natural, tendo então um desenvolvimento acelerado e sendo também muito difundida. Costuma-se dizer, também, que a PL é um tópico da ciência Pesquisa Operacional, a qual contém outros tópicos tais como Teoria das Filas, Simulação, Teoria dos Jogos, Programação Dinâmica, PERT/CPM, etc. Estudos estatísticos têm mostrado que a PL é hoje uma das técnicas mais utilizadas da Pesquisa Operacional. É comum vermos aplicações de PL fazerem parte de rotinas diárias de planejamento das mais variadas empresas, tanto nas que possuem uma sofisticada equipe de planejamento como nas que simplesmente adquiriram um software para alguma função de planejamento. Podemos conceituar a PL como a seguir:

É importante também, desde já, esclarecer que a palavra programação tem aqui o significado de planejamento. Fazemos isto para evitar a confusão com o termo programação de computadores, termo bastante utilizado atualmente na Ciência da Computação. Portanto, a PL é uma técnica de planejamento baseada em matemática. Certamente a PL utiliza computadores para resolver seus problemas, mas é importante entender que a palavra programação tem significados diferentes nas duas ciências. A PL é uma técnica de otimização. A PL é uma ferramenta utilizada para encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo em situações nas quais temos diversas alternativas de escolha sujeitas a algum tipo de restrição ou regulamentação.

2 - APLICAÇÕES DA PL

Na prática a PL tem sido aplicada em áreas tão diversas como mostram os exemplos seguintes:

Alimentação: Que alimentos as pessoas (ou animais) devem utilizar, de modo que o custo seja mínimo e os mesmos possuam os nutrientes nas quantidades adequadas, e que também atendam a outros requisitos, tais como variedade entre as refeições, aspecto, gosto, etc?

Rotas de transporte: Qual deve ser o roteiro de transporte de veículos de carga de modo que entregue toda a carga no menor tempo e no menor custo total?

Manufatura: Qual deve ser a composição de produtos a serem fabricados por uma empresa de modo que se atinja o lucro máximo, sendo respeitadas as limitações ou exigências do mercado comprador e a capacidade de produção da fábrica?

Siderurgia: Quais minérios devem ser carregados no alto-forno de modo a se produzir, ao menor custo, uma liga de aço dentro de determinadas especificações de elementos químicos?

Petróleo: Qual deve ser a mistura de petróleo a ser enviada para uma torre de craqueamento para produzir seus derivados (gasolina, óleo, etc) a um custo mínimo?

Os petróleos são de diversas procedências e possuem composições diferentes.

Agricultura: Que alimentos devem ser plantados de modo que o lucro seja máximo e sejam respeitadas as características do solo, do mercado comprador e dos equipamentos disponíveis?

Carteira de investimentos: Quais ações devem compor uma carteira de investimentos de modo que o lucro seja máximo e sejam respeitadas as previsões de lucratividade e as restrições governamentais?

Mineração: Em que seqüência deve-se lavrar blocos de minério abaixo do solo, dados sua composição, posicionamento e custos de extração?

Localização industrial: Onde devem ser localizados as fábricas e os depósitos de um novo empreendimento industrial, de modo que os custos de entrega do produto aos varejistas sejam minimizados?

Então vamos colocar mãos à obra:

Vamos seguir o exemplo de um problema a ser equacionado. É um problema corriqueiro que já deve ter acontecido com a maioria de vocês:

O SEU PLANEJAMENTO “SOCIAL”

Considere que você está saindo com duas namoradas ao mesmo tempo: Kelly Key e Juliana Paes

É claro que não deixaria as meninas sem exemplo:

Meninas, personalizei o problema também para vocês. Imaginem-se saindo com o Brad Pitt e o Gianecchini:

Qual é a decisão?

- Se você pudesse, estou certa, planejaria sair com as duas ao mesmo tempo, e a todo tempo, acertei?
- Mas, sair com as duas ao mesmo tempo não dá. Elas não aceitariam sair com você juntas. São ciumentas!!!
- E, sair todo dia também não dá. Você não tem dinheiro (entre outras coisas), para sair todo dia.
- Para garantir a sua felicidade, considerando estes problemas desagradáveis, você precisa decidir quantas vezes na semana sair com cada uma.

A Decisão:

Chamemos assim:

X_1 = Quantidade de vezes que você sairá com a Kelly, por semana.

X_2 = Quantidade de vezes que você sairá com a Juliana, por semana.

Variáveis de decisão:

O que nós criamos, X_1 e X_2 , são as chamadas variáveis de decisão; as variáveis de decisão são aqueles valores que representam o cerne do problema, e que podemos decidir (escolher) livremente.

Veja que, a princípio, você pode sair quantas vezes quiser com Kelly Key e com Juliana Paes.

Entretanto, existe um pequeno problema:

• Juliana é chique e gosta de lugares caros. Uma noite com ela custa R\$ 180,00. • Kelly é mais simples, gosta de passeios baratos. Uma noite com ela custa só R\$ 100,00.

• Mas a sua semanada é de apenas R\$ 800,00. Como fazer para garantir que você não vai se endividar?

Garantindo a semanada:

Se você sai com a Juliana X1 vezes na semana, e cada vez gasta R\$ 180,00, então você gasta 180 X1 por semana.

Fazendo o mesmo raciocínio para a Kelly, obtemos o seguinte:

$$180 X1 + 100 X2 \leq 800$$

↓
garantia

Agora o seu problema é com o relógio, pois a diferença com as duas não é somente com relação aos gastos:

• Kelly é muito agitada e cada saída com ela você gasta 4 horas do seu precioso tempo.

• Quando sai com Juliana que é mais sossegada, você gasta apenas 2 horas. Garantindo os estudos:

Considere que os seus afazeres com PO só lhe permitem 20 horas de lazer por semana. Usando a notação anterior, como fazer para garantir que não vai extrapolar este tempo?

$$2 X1 + 4 X2 \leq 20$$

↓
garantia

Agora vamos pensar em tudo junto:

Restrições

Você já pode se planejar. Decida quantas vezes vai sair com Juliana (X1) e quantas vai sair com Kelly (X2).

Vamos ver quantas horas e quanto de dinheiro nós consumimos e depois quanto sobra. Quanto consumo:

$$180 X1 + 100 X2 \leq 800 \text{ (horas por semana)}$$

$$2 X1 + 4 X2 \leq 20 \text{ (R\$ por semana)}$$

Por exemplo: Sair com a Juliana 3 vezes e com a Kelly 2 vezes:

$$X1 = 3$$

$$X2 = 2$$

$$(2 \times 3) + (4 \times 2) = 14 \text{ horas}$$

CONSUMO

$$(180 \times 3) + (100 \times 2) = 740 \text{ reais}$$

Quanto sobra?

Saindo 3 vezes com Juliana e 2 com Kelly, sobram 6 horas e 60 reais.

Agora vamos tentar a situação em você sai 3 vezes com Juliana e 4 vezes com a Kelly.

O resultado é negativo, pois:

$$(2 \times 3) + (4 \times 4) = 22 \text{ horas}$$

$$(180 \times 3) + (100 \times 4) = 940 \text{ reais}$$

O que sobra, ou melhor o que falta são:

(-) 2 horas e

(-) 140 reais

Esta é uma situação impossível dentro das possibilidades (restrições) que lhes foram propostas.

Mas falta um objetivo !!!!!

É preciso pensar no objetivo final. O que eu quero para obter a maior felicidade? Algumas opções:

- Sair a maior quantidade de vezes possível por semana, ou seja:

MAX. $x_1 + x_2$

Total de saídas, independente de com quem.

Outro objetivo possível:

- Suponha que você goste de Kelly duas vezes mais do que de Juliana. A representação da sua preferência ficaria assim:

MAX. $x_1 + 2x_2$

Kelly terá o dobro.

$\max x_1 + x_2$	funções objetivo	$\max x_1 + 2x_2$
S.r.	restrições	S.r.
$2x_1 + 4x_2 \leq 20$		$2x_1 + 4x_2 \leq 20$
$180x_1 + 100x_2 \leq 800$		$180x_1 + 100x_2 \leq 800$
$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$
modelo com o primeiro	condições de não-negatividade	modelo com o segundo

Vamos então começar a exercitar nossos conhecimentos:

LISTA DE EXERCÍCIO # 1

Monte o modelo de programação linear dos problemas listados abaixo

1) Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato 1 unidade couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades monetárias e o do cinto é de 2 unidades monetárias, pede-se: o modelo do sistema de produção do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro por hora.

2) Uma companhia de transporte tem dois tipos de caminhões. O tipo "A" tem 2 m³ de espaço refrigerado e 3 m³ de espaço não refrigerado; o tipo "B" tem 2 m³ de espaço refrigerado e 1 m³ de não refrigerado. O cliente quer transportar um produto que necessitará de 16 m³ de área refrigerada e 12 m³ de não refrigerada. A companhia calcula em 1.100 litros o combustível para uma viagem com o caminhão "A" e 750 l para o caminhão "B". Quantos caminhões de cada tipo deverão ser usados no transporte do produto, com o menor consumo de combustível?

3) Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranjas a 20 u.m. de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos a 10 u.m. de lucro por caixa, e no máximo 200 caixas de tangerinas a 30 u.m. de lucro por caixa. De que forma deverá ele carregar o caminhão para obter o lucro máximo? Construa o modelo do problema.

4) Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: foi descoberto que o programa "A" com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa "B", com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de 1 semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo 5 minutos para sua propaganda e que não há verba para mais

de 80 minutos de música. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar para obter o número máximo de telespectadores? Construa o modelo do sistema.

5) Uma empresa fabrica 2 modelos de cintos de couro. O modelo M1, de melhor qualidade, requer o dobro do tempo de fabricação em relação ao modelo M2. Se todos os cintos fossem do modelo M2, a empresa poderia produzir 1.000 unidades por dia. Os cintos empregam fivelas diferentes, cuja disponibilidade diária é de 400 para M1 e 700 para M2. Os lucros unitários são de \$4,00 para M1 e \$3,00 para M2. Qual o programa ótimo de produção que maximiza o lucro total diário da empresa? Construa o modelo do sistema descrito.

6) Uma empresa, após um processo de racionalização de produção, ficou com disponibilidade de 3 recursos produtivos, R1, R2 e R3. Um estudo sobre o uso desses recursos indicou a possibilidade de se fabricar 2 produtos P1 e P2. Levantando os custos e consultando o departamento de vendas sobre o preço de colocação no mercado, verificou-se que P1 daria um lucro de \$ 120,00 por unidade e P2, \$150,00 por unidade. O departamento de produção forneceu a seguinte tabela de uso de recursos:

Produto	Recurso R1/unidade	Recurso R2/unidade	Recurso R3/unidade
P1	2	3	5
P2	4	2	3
Disponibilidade de recurso/mês	100	90	120

Que produção mensal de P1 e P2 traz o maior lucro para a empresa? Construa o modelo do sistema.

7) Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

A (Arrendamento) – Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana-de-açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra \$ 300,00 por alqueire por ano.

P (Pecuária) – Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/alq.) e irrigação (100.000 l de água / alq.) por ano. O lucro estimado nesta atividade é de \$ 400,00 por alqueire por ano.

S (Plantio de soja) – usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 l de água/alq para irrigação por ano. O lucro estimado nessas atividades é de \$ 500,00/alqueire no ano.

Disponibilidade de recursos por ano:

12.750.000 l de água

14.000 kg de adubo

100 alqueires de terra

Quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno? Construa o modelo de decisão.

8) Duas fábricas produzem 3 diferentes tipos de papel. A companhia que controla as fábricas tem um contrato para produzir 16 toneladas de papel fino, 6 toneladas de papel médio e 28 toneladas de papel grosso. Existe uma demanda para cada tipo de espessura. O custo de produção na primeira fábrica é de \$ 1.000 e o da segunda fábrica é de \$ 2.000 por dia. A primeira fábrica produz 8 toneladas de papel fino, 1 tonelada de papel médio e 2 toneladas de papel grosso por dia, enquanto a segunda fábrica produz 2 toneladas de papel fino, 1 tonelada de papel médio e 7 toneladas de papel grosso. Quantos dias cada fábrica deverá operar para suprir os pedidos mais economicamente?

9) Uma liga especial constituída de ferro, carvão, silício e níquel pode ser obtida usando a mistura desses minerais puros além de dois tipos de materiais recuperados: Material Recuperado 1 – MR1 – Composição:

Ferro – 60% custo por kg: \$0,20

Carvão – 20%

Silício – 20%

Material Recuperado 2 – MR2 – Composição:

Ferro – 70% custo por kg: \$0,25

Carvão – 20%

Silício – 5%

Níquel – 5%

A liga deve ter a seguinte composição final:

Matéria-prima	% mínima	% máxima
Ferro	60	65
Carvão	15	20
Silício	15	20
Níquel	5	8

O custo dos materiais puros são (por kg): ferro: \$0,30 ; carvão \$0,20; silício \$0,28; níquel \$0,50. Qual deverá ser a composição da mistura em termos dos materiais disponíveis, com menor custo por kg? Construa o modelo da decisão.

10) A Esportes Radicais S/A produz pára-quedas e asa deltas em duas linhas de montagem. A primeira linha de montagem tem 100 horas semanais disponíveis para a fabricação dos produtos, e a segunda linha tem um limite de 42 horas semanais. Cada um dos produtos requer 10 horas de processamento na linha 1, enquanto que na linha 2 o pára-quedas requer 3 horas e a asa delta requer 7 horas. Sabendo que o mercado está disposto a comprar toda a produção da empresa e que o lucro pela venda de cada pára-quedas é de R\$ 60,00 e para cada asa-delta vendida é de R\$ 40,00, encontre a programação de produção que maximize o lucro da Esportes Radicais S/A.