Introdução à Programação Linear

Caracterização

- É um subitem da programação matemática
- É um dos modelos utilizados em pesquisa operacional.
- É um modelo de otimização.
- Tem como objetivo:
  - "Alocar recursos escassos (ou limitados) a atividades em concorrência (em competição)"

Exemplo

- Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2).
- Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina (a tecnologia utilizada é intensiva em mão-de-obra).
- Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina (a tecnologia é intensiva em capital).
- A empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina para um período de produção.
- Sabe-se que os lucros líquidos dos produtos são $4 e $1 respectivamente.

Pergunta-se

- Quanto a empresa deve fabricar de cada produto para ter o maior lucro?
- Caso se obtenha algum recurso financeiro externo, para investimento em expansão, em quais dos recursos a empresa deveria aplicá-lo ?
- Qual seria o impacto no lucro se alguns trabalhadores faltassem ao trabalho limitando as horas homens disponíveis em 15 horas?

Pergunta-se

- Sabendo-se que 4 máquinas são responsáveis pela produção no período em análise até quanto se deveria pagar pelo aluguel de uma máquina se eventualmente uma das quatro máquinas quebrassem?
- Qual deveria ser o lucro líquido fornecido para viabilizar a fabricação um novo produto que utiliza 5 horas de cada recurso?

Resolvendo Intuitivamente

- Que modelo mental poderia ser usado?
- Como se poderia utilizar a intuição para responder as perguntas?
- Tente resolver o problema sem utilizar um modelo formal.

Transformando os dados em expressões matemáticas

- A função lucro
  - Não havendo economia de escala
  - É claro que o lucro máximo seria ilimitado se não fosse a escassez de recursos.
  - Em outros problemas a demanda do mercado também é um fator limitador.

$$L = 4x_1 + x_2$$

Transformando os dados em expressões matemáticas

- As restrições
  - Não se pode utilizar o que não se tem!
  - A quantidade utilizada deve ser menor ou igual a quantidade disponível.
  - As quantidades de fabricação devem ser não negativas

$$H.H. \quad 9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$H.M. \quad 3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

O modelo do problema

Função Objetivo

$$\underset{x_1, x_2}{Max} \quad \boxed{L = 4x_1 + x_2}$$

Variáveis de Decisão

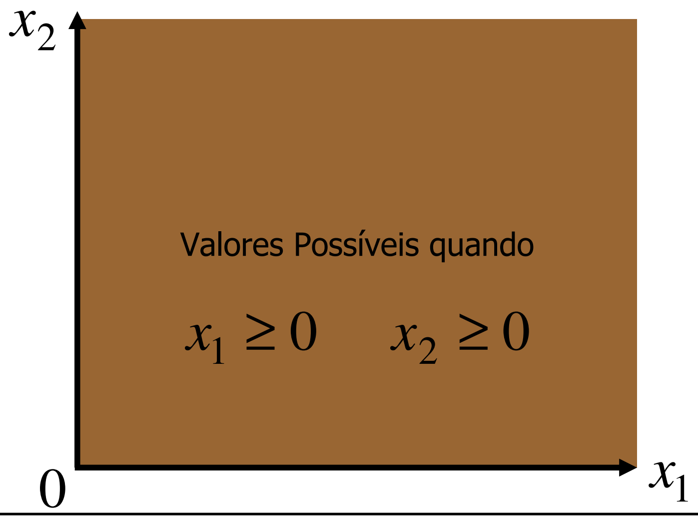
Limitações

$$\begin{array}{ll} H.H. & 9x_1 + x_2 \leq 18 \\ H.M. & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

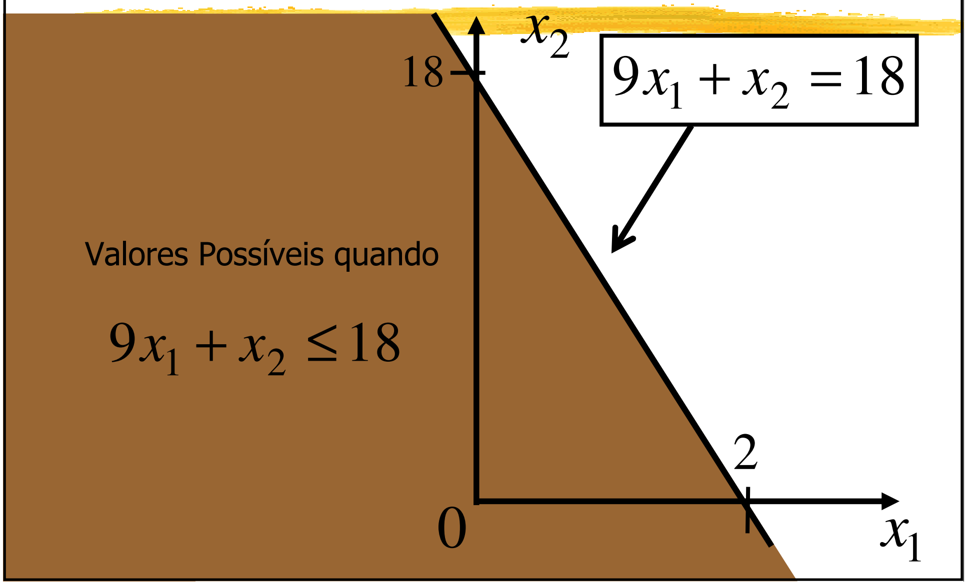
Matriz Tecnológica

Conjunto das Possibilidades de Produção

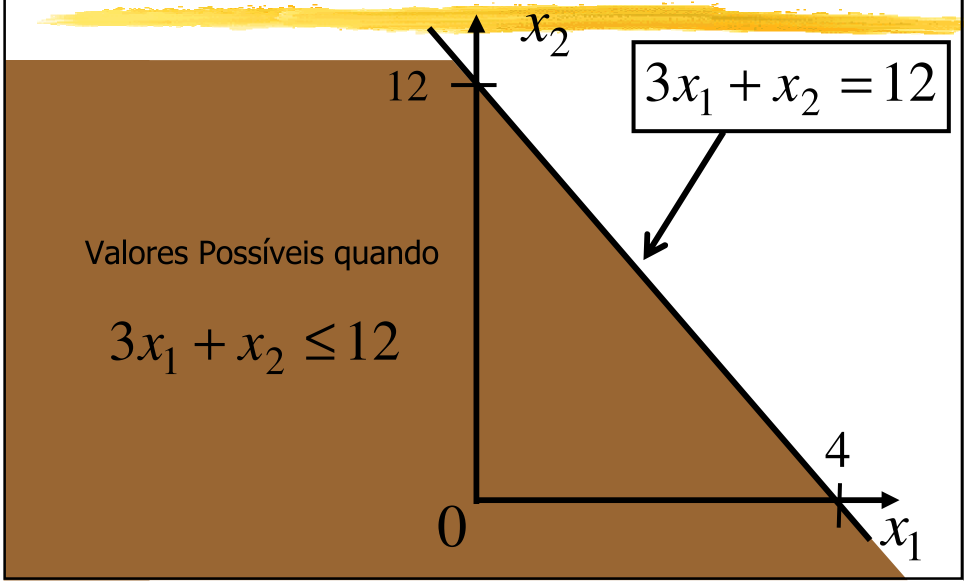
Solução Gráfica: Construindo o conjunto de possibilidades



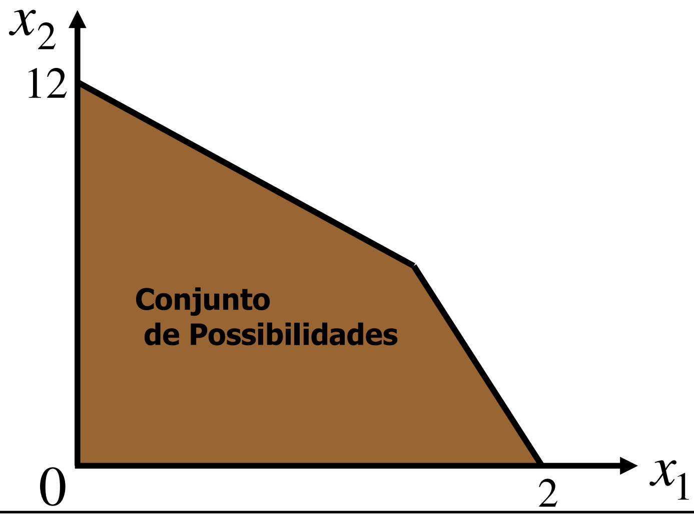
Solução Gráfica: Construindo o conjunto de possibilidades



Solução Gráfica: Construindo o conjunto de possibilidades



Solução Gráfica: Construindo o conjunto de possibilidades



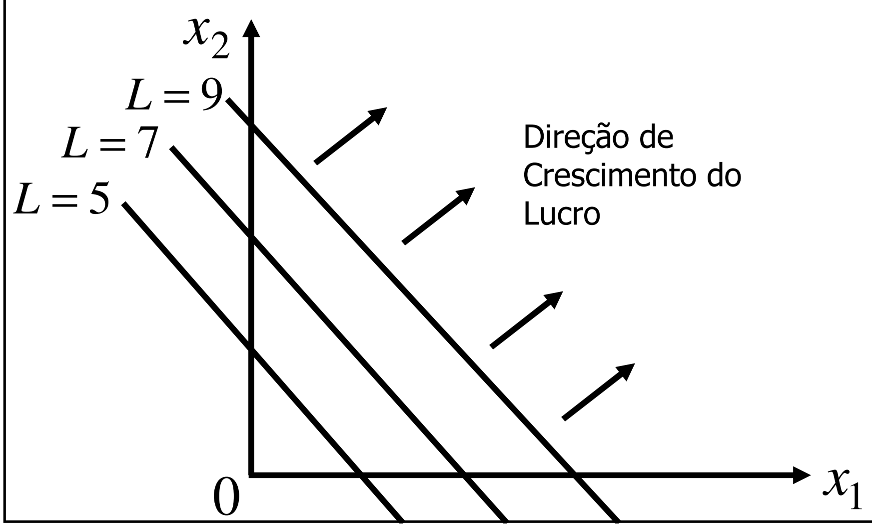
Solução Gráfica: Definindo as Curvas de Níveis do Objetivo

- Para cada valor de L tem-se uma reta no plano (x2 vs x1).
- Dado um valor de L é possível traçar um lugar geométrico (uma reta) onde as várias combinações de produção dão o mesmo lucro, essas curvas são conhecidas como isolucros.

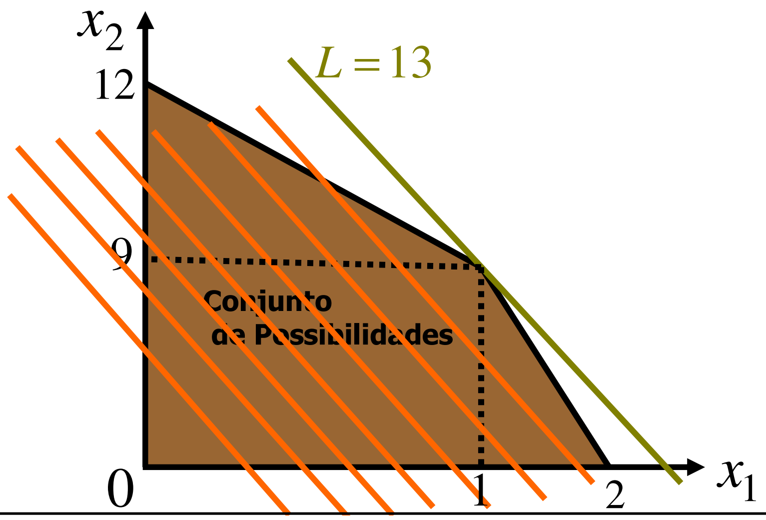
$$4x_1 + x_2 = L \Rightarrow x_2 = -4x_1 + L$$

Retas com inclinações negativas

Solução Gráfica: Desenhando as Curvas de Níveis do Objetivo



Solução Gráfica: Reunindo os componentes e resolvendo



A solução

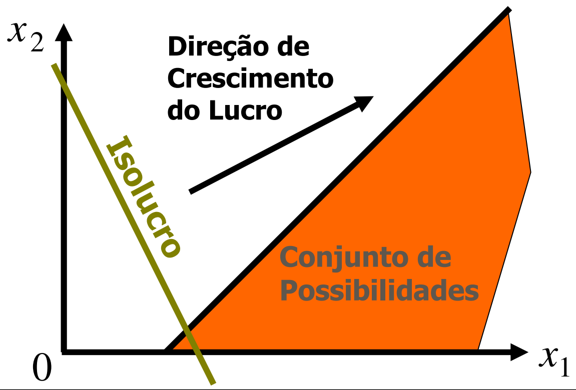
- Que características permitiram a solução?
  - O conjunto de possibilidades era convexo.
  - Um conjunto é convexo quando toda combinação convexa de dois elementos dele pertence a ele.
  - Uma combinação convexa de dois elementos, x e y é um terceiro elemento z tal que: $z=a.x+(1-a).y$ onde $0 \leq a \leq 1$.
  - É possível definir combinação convexa de n elementos.

Casos onde a solução não existe

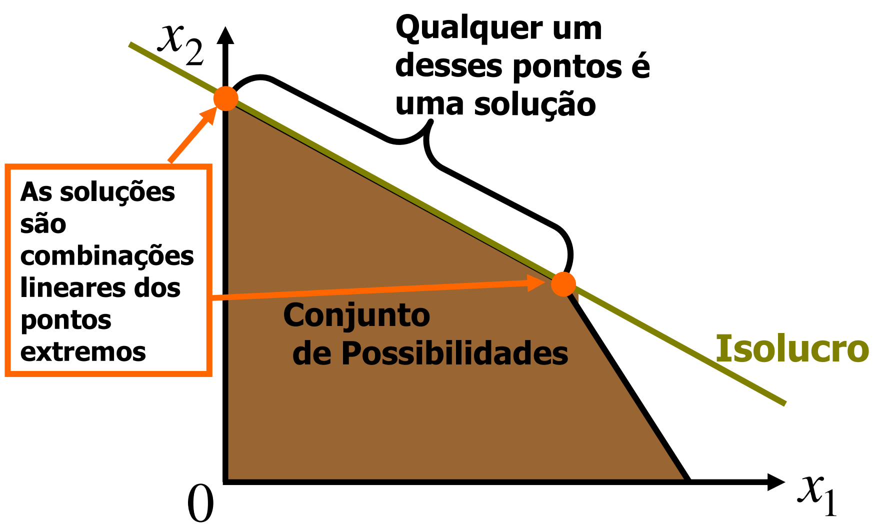
- Conjunto de Possibilidades é vazio
- Não há solução compatível
- Exemplo:

Casos onde a solução não existe

- A solução é ilimitada
- Não há como definir a decisão
- Exemplo:



Caso de Infinitas Soluções



Exercícios: Resolva Graficamente

1. Maximize o lucro

$$L = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeito a:

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Exercícios: Resolva Graficamente

2. Maximize a receita

$$R = 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Exercícios: Resolva Graficamente

3. Maximize o lucro

$$L = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeito a:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Exercícios: Resolva Graficamente

4. **Duas fábricas produzem três tipos de papel. A companhia que controla as fábricas tem um contrato para produzir 16 toneladas de papel fino, 6 toneladas de papel médio e 28 toneladas de papel grosso. Existe uma demanda para cada tipo de papel . O custo de produção na 1ª fábrica é de R$1.000,00 e o da 2ª é de R$2.000,00, por dia. A primeira fábrica produz 8 toneladas de papel fino, 1 tonelada de papel médio e 2 toneladas de papel grosso por dia, enquanto a segunda produz 2 toneladas de papel fino, 1tonelada de papel médio e 7 toneladas de papel grosso. Quantos dias cada fábrica deve operar para suprir os pedidos com o menor custo?**

Exercícios: Resolva Graficamente

5. Uma companhia de transporte tem dois tipos de caminhões: O tipo A tem $2m^3$ de espaço refrigerado e $3m^3$ de espaço não refrigerado; o tipo B tem $2m^3$ de espaço refrigerado e $1m^3$ de não refrigerado. O cliente quer transportar produtos que necessitarão de $16m^3$ de espaço refrigerado e $12m^3$ de área não refrigerada. A companhia calcula que são necessários em 1.100 litros de combustível para uma viagem com o caminhão A e 750 litros para o caminhão B. Quantas viagens deverão ser feitas de cada tipo de caminhão para que se tenha o menor custo de combustível?

Voltando ao Primeiro Problema

$$\underset{x_1, x_2}{Max} \quad L = 4x_1 + x_2$$

$$H.H. \quad 9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$H.M. \quad 3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

Lembrando que foi resolvido graficamente, analise.......

Resultados da Solução Gráfica

- Quantas perguntas foram respondidas?
- Quantas fábricas teriam 2 produtos e apenas dois recursos? Ou duas restrições?
- Como se pode obter um método analítico para resolver o problema?
- Qual a utilidade deste método?

Exemplo 2

- Uma grande fábrica de móveis dispõe em estoque de 300m de tábuas, 600m de pranchas e 500m de painéis de aglomerado.
- Oferece normalmente 4 modelos de móveis: Escrivaninha, Mesa, Armário e Prateleira.
- Os modelos são vendidos respectivamente por $100,00; $80,00; $120,00; $30,00.
- E consomem:
  - Escrivaninha: 1m tábua, 3m de painéis.
  - Mesa: 1m tábua, 1m prancha, 2m painéis.
  - Armário: 1m tábua, 1m prancha, 4 painéis.
  - Prateleira: 4m tábua, 2 de prancha.

Pergunta-se

- Quanto a empresa deve fabricar de cada produto para ter a maior receita?
- Caso se obtenha algum recurso financeiro externo, para investimento em expansão, em quais dos recursos a empresa deveria aplicá-lo ?

Transformando os dados em expressões matemáticas

- A função receita
  - Não havendo economia de escala
  - É claro que a receita máxima seria ilimitada se não fosse a escassez de recursos.

$$L = 100x_E + 80x_M + 120x_A + 30x_P$$

Transformando os dados em expressões matemáticas

- As restrições
  - As quantidades utilizadas devem ser menor ou igual às quantidades disponíveis.
  - As quantidades de fabricação devem ser não negativas

$$
\begin{array}{llr}
Tb & x_E + x_M + x_A + 4x_P & \leq 300 \\
Pr & x_M + x_A + 2x_P & \leq 600 \\
Pa & 3x_E + 2x_M + 4x_A & \leq 500
\end{array}
$$

$$x_E \geq 0 \quad x_M \geq 0 \quad x_A \geq 0 \quad x_P \geq 0$$

O modelo do problema

$$\underset{x_E, x_M, x_A, x_P}{Max} \quad L = 100x_E + 80x_M + 120x_A + 30x_P$$

$$
\begin{array}{llr}
Tb & x_E + x_M + x_A + 4x_P & \leq 300 \\
Pr & x_M + x_A + 2x_P & \leq 600 \\
Pa & 3x_E + 2x_M + 4x_A & \leq 500
\end{array}
$$

$$x_E \geq 0 \quad x_M \geq 0 \quad x_A \geq 0 \quad x_P \geq 0$$

Pergunta-se

- Como aplicar a solução gráfica?
- Só é possível obter uma solução com um método analítico.
- O algoritmo para solução é o método SIMPLEX

O modelo Padrão

$$\underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{Max} \quad L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.a$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j \quad j = 1, \ldots, p$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i$$

O modelo Padrão na Forma Matricial

$$\underset{x}{Max}\, L = c.x$$

$$s.a$$

$$A.x \leq b$$

$$x \geq 0$$

Modelo Padrão

- Todo modelo de programação linear pode ser posto na forma padrão que não é limitativa.
- Um problema de minimização, por exemplo, pode ser resolvido pela maximização do negativo da função objetivo.
- Restrições de $\geq$ podem ser multiplicadas por -1 para se tornarem restrições padrão.
- Variáveis que possam assumir qualquer valor e não apenas valores positivos podem ser substituídas pela diferença de duas variáveis positivas.

O Método SIMPLEX

- ⌘Algoritmo criado para se obter a solução algebricamente.
- ⌘Seqüência finita de passos que se seguidas levam ao objetivo procurado.
- ⌘É necessário conhecer o método para se interpretar melhor os resultados.
- ⌘Utiliza-se o exemplo que foi resolvido graficamente para se acompanhar os passos.

O Método SIMPLEX

- ⌘Se o conjunto de possibilidades fosse formado por igualdades seria mais fácil resolver o sistema que o forma.
- ⌘Pode-se acrescentar uma variável não negativas (para ficarem na forma padrão) a cada restrição do modelo padrão de tal forma que as desigualdades sejam sempre atingidas.
- ⌘Estas variáveis são chamadas de variáveis de folga.

O Método SIMPLEX

- As variáveis devem ser controladas ou seja, são escolhidas pelo decisor de tal forma a atingir a igualdade nas restrições.
- As variáveis de folga aumentam os graus de liberdade do sistema (infinitas soluções).
- O poder que se tem sobre as variáveis deve ser usado para atingir o objetivo procurado.

Voltando ao Primeiro Problema

$$\underset{x_1, x_2}{Max} \quad L = 4x_1 + x_2$$

$$H.H. \quad 9x_1 + x_2 \le 18$$

$$H.M. \quad 3x_1 + x_2 \le 12$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

Só para lembrar

O Método SIMPLEX

- No primeiro exemplo deve-se acrescentar duas variáveis de folga:

$$H.H. \quad 9x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

$$H.M. \quad 3x_1 + x_2 + x_4 = 12$$

Além disso tem-se que:

$$L = 4x_1 + x_2 \Rightarrow L - 4x_1 - x_2 = 0$$

E todas as variáveis devem ser maiores que zero

O Método SIMPLEX

- Forma-se então um sistema de equações lineares com dois graus de liberdade:

$$\begin{array}{lllllll} L & -4x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\ & 9x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 18 \\ & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 12 \end{array}$$

Qual a solução deste sistema?

O Método SIMPLEX

- Uma solução imediata e que muitas vezes está disponível é a solução onde todas as variáveis originais são nulas e as de folga são iguais aos limites dos recursos.
- Esta solução é conhecida como solução trivial.
- No sistema esta solução tem características interessantes:

solução

$$
\begin{array}{lllll}
L - 4x_1 - x_2 & = & \boxed{0} & L=0 \\
2x_1 + x_2 + x_3 & = & \boxed{18} & x_3=18 \\
3x_1 + x_2 + x_4 & = & \boxed{12} & x_4=12
\end{array}
$$

As outras variáveis são nulas

O Método SIMPLEX

- As variáveis que são diferentes de zero, ou que têm seus valores definidos no lado direito do sistema são ditas estarem na base ou são chamadas de variáveis básicas.
- As que têm coeficientes não nulos na linha da função objetivo são conhecidas como variáveis não básicas ou variáveis que estão fora da base.

x_3 e x_4 são variáveis básicas

x_1 e x_2 são variáveis não básicas

O Método SIMPLEX

- Qual o objetivo?
- Como se deve usar o poder para impor valores às variáveis.
- Lembre-se você tem dois graus de liberdade, pode escolher os valores de até duas variáveis.
- Que variável fará seu lucro aumentar mais?
- Primeiramente deve-se expor o sistema de uma maneira mais adequada.
- Uma maneira que permita visualizar certas características.

O Método SIMPLEX

- A seguinte forma foi escolhida como a mais conveniente para se expor o método.

	x1	x2	x3	x4	
L	-4	-1	0	0	0
x3	9	1	1	0	12
x4	3	1	0	1	18

Estes quadros são conhecidos como quadro simplex, este particularmente é o quadro simplex inicial.
Entretanto vai-se mostrar primeiramente o raciocínio depois a mecânica do método.

O Método SIMPLEX

$$L = 4x_1 + x_2 \Rightarrow L - 4x_1 - x_2 = 0$$

- Observando o objetivo, de uma forma ou de outra, ver-se claramente que x_1 (atualmente nula) aumentaria mais rapidamente o lucro se fosse posta na base.
- Como o objetivo é maximizar o lucro o ideal seria aumentar x_1 até o infinito.
- Entretanto todas as outras restrições devem ser ainda satisfeitas na presença do máximo valor que x_1 possa alcançar.

O Método SIMPLEX

$$\begin{array}{lllllll} L & -4x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\ & 9x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 18 \quad 18 \div 9 \\ & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 12 \quad 12 \div 3 \end{array}$$

- Como deseja-se aumentar x_1 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições.

  Na primeira restrição o limite de x_1 é 2.

  Na segunda restrição o limite de x_1 é 4.

  Como não se pode romper nenhuma das restrições, x_1 deve ser no máximo 2.
  Como ficam as demais variáveis?

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{lllllll}
L & -4x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\
\boxed{\quad} & 9x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 18 \quad 2 \\
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 12
\end{array}
$$

- O limite de x_1 ocorre na linha da primeira restrição.
  Quando x_1 atingir o valor de 2, x_3 deverá ser nula para atender a restrição.
  x_4 que era 12 deverá ser posta em 6 dado que 6 unidades da segunda restrição serão consumidas por x_1 com valor 2.
  Desta forma x_1 entrou na base e x_3 saiu.

O Método SIMPLEX

- A nova solução é:
  - x_1=2 ; x_4 = 6; variáveis básicas.
  - x_3=0 ; x_2 = 0; variáveis não básicas.
  - L=8
- Se, utilizando operações elementares, o sistema for posto na mesma forma, com relação às variáveis básicas e não básicas, será possível perceber se alguma variável (NB=0) poderá contribuir para aumentar o lucro.
- Isto é feito escalonando-se o sistema na coluna relativa a x_1, deixando o coeficiente desta variável igual a 1 apenas na linha onde ela entrou (trocou valores com x_3).

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{llllll}
L & -4x_1 & -x_2 & & & = 0 \\
 & 9x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 18 \quad \div 9 \\
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 12
\end{array}
$$

⌘ Para se fazer o coeficiente igual a um deve-se dividir toda equação, na linha de entrada, por 9.

$$
\begin{array}{llllll}
L & -4x_1 & -x_2 & & & = 0 \\
 & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 12
\end{array}
$$

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{lllllll}
 & L & -4x_1 & -x_2 & & & = 0 \\
4\ \text{x} & & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 12
\end{array}
$$

⌘ Multiplicando a nova linha de x_1 por 4 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$
\begin{array}{llllll}
L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
 & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 12
\end{array}
$$

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
-3 \times & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 12
\end{array}
$$

⌘ Multiplicando a nova linha de x_1 por -3 e somando com a outra linha , zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$
\begin{array}{rrrrl}
L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = 6
\end{array}
$$

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{rrrrl}
L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = 6
\end{array}
$$

⌘ O sistema encontra-se agora como antes (com relação as VB e VNB) e pode-se decidir qual variável deve entrar na base para aumentar o lucro.

⌘ A equação da função lucro pode ser escrita agora como: $L = \frac{5}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3 + 8$

Claramente se x_2 for aumentada o lucro aumentará.

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{lllllll}
L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\
 & \boxed{x_1} & \boxed{+\frac{1}{9}x_2} & \boxed{+\frac{1}{9}x_3} & & \boxed{=} & \boxed{2} \quad 2\div 1/9 \\
 & & \boxed{+\frac{2}{3}x_2} & \boxed{-\frac{1}{3}x_3} & \boxed{+x_4} & \boxed{=} & \boxed{6} \quad 6\div 2/3
\end{array}
$$

- Deseja-se então aumentar ao máximo o valor de x_2 sem romper nenhuma das restrições.
- Isto é feito como antes.

  Na primeira restrição x_2 pode ser aumentada até 18

  Na segunda restrição x_2 pode ser aumentada até 9

  Como as duas restrições devem ser atendidas, x_2 entrará na linha onde x_4 é a VB.

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{lllllll}
L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\
 & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = & 2 \\
 & & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = & 6
\end{array}
$$

- A nova solução será $x_2 = 9$, $x_4 = 0$, $x_3=0$ e $x_1 =1$ o lucro será agora de 13. Claramente a solução é melhor que a anterior.
- Para decidir se existe alguma variável NB que aumentaria o lucro deve-se colocar o sistema novamente no formato inicial, com relação as variáveis básicas e não básicas.

O Método SIMPLEX

$$\begin{array}{lllll} L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\ x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\ & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = 6 \end{array}$$

- O procedimento é semelhante, através de operações elementares colocar a variável x_2 com coeficiente 1 na linha onde ela entrou e zero nas demais.
- Multiplique a linha onde x_2 entrou por 3/2 para fazer seu coeficiente unitário.

$$x_2 \quad -\frac{1}{2}x_3 \quad +\frac{3}{2}x_4 \quad = 9$$

O Método SIMPLEX

$$\begin{array}{lllll} L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\ x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\ & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = 9 \end{array}$$

- Escalonando: multiplique a linha de x_2 por -1/9 e some com a linha de x_1.

$$\begin{array}{lllll} L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\ x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = 1 \\ & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = 9 \end{array}$$

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{lllllll}
L & & \boxed{-\frac{5}{9}x_2} & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\
 & x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = & 1 \\
 & & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = & 9
\end{array}
$$

- Escalonando: multiplique a linha de x_2 por 5/9 e some com a linha do lucro.

$$
\begin{array}{lllllll}
L & & & +\frac{1}{6}x_3 & +\frac{5}{6}x_4 & = & 13 \\
 & x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = & 1 \\
 & & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = & 9
\end{array}
$$

O Método SIMPLEX

$$
\begin{array}{lllllll}
L & & & +\frac{1}{6}x_3 & +\frac{5}{6}x_4 & = & 13 \\
 & x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = & 1 \\
 & & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = & 9
\end{array}
$$

- Note que agora nenhuma variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá um algoritmo para solução, o algoritmo SIMPLEX.
- Utilizando-se os quadros os passos ficaram mais fáceis de serem implementados